



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

**MODELADO Y SIMULACIÓN DEL
MOVIMIENTO DE UN COHETE MEDIANTE
UN SISTEMA DE ECUACIONES
DIFERENCIALES**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICA

PRESENTA:
MARTHA IVÓN FABIAN ONOFRE

DIRECTORES DE TESIS:
Dr. Erik Mendoza de la Luz
Dr. Alfredo Cano Rodríguez

Toluca, México, 2019



Índice general

Agradecimientos	III
1. Introducción	1
2. Teoría	3
2.1. Teoría Física	3
2.1.1. Leyes de Kepler	3
2.1.2. Leyes de Newton	4
2.1.3. Ley de gravitación universal	6
2.1.4. Definiciones y Teoremas	6
2.1.5. Gradiente, lagrangiano y hamiltoniano	11
2.2. Definiciones Matemáticas	13
2.2.1. Ecuaciones Diferenciales	13
3. El problema de dos y tres cuerpos	15
3.1. Problema de dos cuerpos	15
3.1.1. Descripción del problema	16
3.2. Problema de tres cuerpos	16
3.2.1. El problema de los tres cuerpos restringido	16
4. Métodos numéricos de un paso	19
4.1. Método de Euler	20
4.2. Método de Runge-Kutta	22
4.2.1. Preliminares del método de Runge-Kutta	22
4.2.2. Ordenes del Método de Runge-Kutta	23
4.3. Ejemplos aplicando Euler y Runge-Kutta	24
5. Modelo (Problema)	41

6. Solución del Modelo(Problema)	55
A. Programas en Matlab	67
A.0.1. Función y programa de Euler y Runge-Kutta aplicado a una ecuación diferencial lineal	67
A.0.2. Función y programa de Euler y Runge-Kutta aplicado a dos ecuaciones diferenciales lineales	72
A.0.3. Función y programa de Euler y Runge-Kutta aplicado a tres ecuaciones diferenciales lineales	77
A.0.4. Función y programa de Euler y Runge-Kutta aplicado a cuatro ecuaciones diferenciales lineales	83

Capítulo 1

Introducción

Enviar una nave a la Luna, el cuerpo celeste más próximo a la Tierra, a una distancia media aproximada de 384400 km, implica considerar el problema de tres cuerpos que se mueven bajo la acción de fuerzas gravitatorias mutuas.

El problema de dos cuerpos es resoluble en general, pero la adición de un tercero lo hace irresoluble. Así, pues, el problema del movimiento de tres cuerpos que interactúan entre sí a través de fuerzas gravitatorias sigue sin ser resuelto por medio de métodos analíticos al cabo de más de 200 años de estudio.

El presente trabajo de tesis tiene como objetivo diseñar y escribir el programa que resuelve las ecuaciones del movimiento de una nave, moviéndose bajo la acción de los campos gravitatorios terrestre y lunar a través de métodos numéricos.

Uno de los métodos para atacar este problema es el de Runge-Kutta que es capaz de resolver un sistema de ecuaciones diferenciales. Compararemos los resultados obtenidos en este método con resultados del método de Euler.

El Capítulo 2 contiene una serie de definiciones, leyes y teoremas físicos, las cuales nos ayudarán a entender un poco el problema físico y las variables involucradas en el problema a resolver, también contiene definiciones Matemáticas que nos ayudarán con el análisis matemático del cómo se estableció el conjunto de cuatro ecuaciones diferenciales no lineales.

Posteriormente en el Capítulo 3, se establece y explica en general el problema de dos y tres cuerpos, lo que nos dará un panorama general del problema

principal al que nos enfrentamos.

En el Capítulo 4 nos enfocaremos principalmente en los métodos numéricos conocidos como métodos de un paso: el método de Euler y el método de Runge-Kutta de cuarto orden.

En el Capítulo 5 establecemos nuestro modelo matemático, explicamos las variables y constantes que se utilizaran y el desarrollo de nuestro sistema de ecuaciones no lineales.

En el último Capítulo damos solución a nuestro problema, es decir, diseñamos y escribimos el programa que resuelve las ecuaciones del movimiento de una nave, moviéndose bajo la acción de los campos gravitatorios terrestre y lunar mediante el método de Runge-Kutta y el método de Euler, comparamos los resultados obtenidos entre ambos métodos y damos nuestra serie de conclusiones.

Contiene un Apéndice en el cual anexamos los programas en Matlab utilizados para la solución de los ejemplos dados en el Capítulo 4 para una, dos, tres y cuatro ecuaciones diferenciales, utilizando el método de Euler y el método de Runge-Kutta respectivamente.

Capítulo 2

Teoría

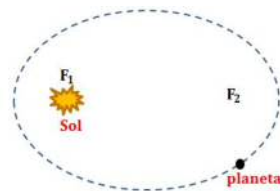
2.1. Teoría Física

Desde la antigüedad las personas han tratado de comprender la naturaleza y los fenómenos que en ella se observan: el paso de las estaciones, el movimiento de los cuerpos y de los astros, los fenómenos climáticos, las propiedades de los materiales, etc. La Física es la ciencia básica que estudia el cosmos, es decir, el todo desde el punto de vista científico. En este capítulo nos encontraremos con una serie de definiciones, leyes y teoremas físicos, las cuales nos ayudarán a entender un poco el problema físico y las variables involucradas del problema que nos interesa.

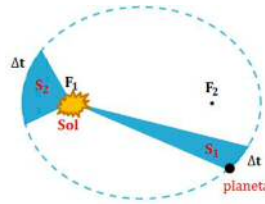
2.1.1. Leyes de Kepler

Las leyes de Kepler están basadas en la observación del movimiento de los planetas, las cuales facilitaron más tarde a Newton la formulación de la Ley de la gravitación universal.

- **Primer ley de Kepler:** Cada planeta describe una órbita elíptica alrededor del Sol, este último situado en uno de los focos de la elipse.

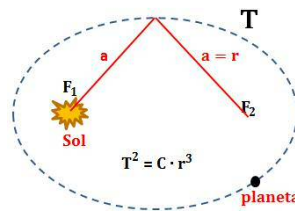


- **Segunda ley de Kepler:** La recta que une cualquier planeta con el Sol, durante su desplazamiento en su órbita, a tiempos iguales barre áreas iguales.



(Una consecuencia es que los planetas van a más velocidad cuando pasan más cerca del Sol).

- **Tercera ley de Kepler:** El cuadrado del período de revolución de cualquier planeta T (tiempo empleado en describir su órbita completa) es proporcional al cubo de la distancia media de ese planeta al Sol.



2.1.2. Leyes de Newton

Las Leyes de Newton, también conocidas como Leyes del movimiento de Newton, son tres principios a partir de los cuales se explican la mayor parte de los problemas planteados por la dinámica, en particular aquellos relativos al movimiento de los cuerpos.

- **Primera ley de Newton:** Si la fuerza resultante externa que actúa sobre un objeto es cero, el vector velocidad del objeto no cambia. Un objeto en reposo permanecerá en reposo; un objeto en movimiento continuará en movimiento con velocidad constante. Un objeto se acelera sólo si una fuerza no equilibrada actúa sobre él. Ésta se llama con frecuencia *ley de inercia*.

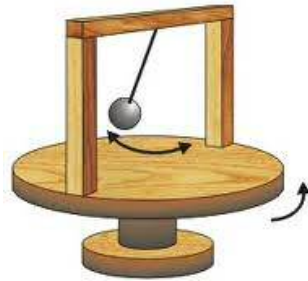


Figura 2.1: El péndulo permanecerá en reposo si sobre él no actúa ninguna fuerza.

- Segunda ley de Newton:** Si F es la fuerza resultante externa que actúa sobre un objeto de masa m , entonces la aceleración a del objeto se relaciona con F por medio de la $F = ma$.
 La ecuación vectorial $F = ma$ puede escribirse en función de sus componentes.

$$\sum F_x = ma_x, \quad \sum F_y = ma_y, \quad \sum F_z = ma_z.$$

Donde estas fuerzas son las componentes de las fuerzas externas que actúan sobre el objeto.

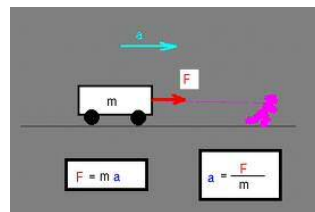


Figura 2.2: Segunda ley de Newton.

- Tercera ley de Newton:** Por cada fuerza que se aplica a un cuerpo hay una fuerza igual en magnitud y dirección, pero de sentido contrario, actuando en algún otro cuerpo. Ésta se llama con frecuencia *ley de acción y reacción*.

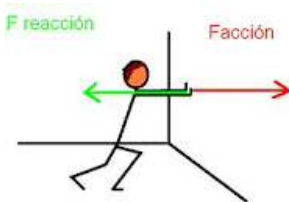


Figura 2.3: Tercera ley de Newton.

2.1.3. Ley de gravitación universal

La ley de gravitación universal es una ley física clásica que describe la interacción gravitatoria entre distintos cuerpos con masa. Fue formulada por Isaac Newton en su libro *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, publicado en 1687, donde establece por primera vez una relación proporcional (deducida empíricamente de la observación) de la fuerza con que se atraen dos objetos con masa.

Definición 2.1 *La fuerza ejercida entre dos cuerpos de masas m_1 y m_2 es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa, y está dirigida según la recta que une los cuerpos. Dicha fuerza se conoce como **fuerza de la gravedad** o **fuerza gravitacional** y se expresa de la forma:*

$$F_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (2.1)$$

donde

$F_g :=$ es el módulo de la fuerza ejercida entre ambos cuerpos, y su dirección se encuentra en el eje que une ambos cuerpos.

$G :=$ es la constante de gravitación universal.¹.

2.1.4. Definiciones y Teoremas

Cuando consideramos sucesivamente intervalos de tiempo más cortos a partir de t_1 , la velocidad media para cada intervalo se aproxima más a la

¹El valor de dicha constante es aproximadamente $G = 6.67384(80) \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$. Se han establecido otros valores constantes aproximados universales, algunos de ellos son: Masa de la Tierra $M_T = 5.9736 \times 10^{24} \text{ kg}$, Masa de la Luna $M_L = 0.07349 \times 10^{24} \text{ kg}$, distancia de la Tierra a la Luna $r_1 = 3.844 \times 10^8 \text{ m}$.

pendiente de la tangente en t_1 . La pendiente de esta tangente se define como la **velocidad instantánea** en t_1 . Esta tangente es el límite de la relación $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ cuando Δt se va a infinito, y por lo tanto Δx , se aproxima a cero. Así podemos decir,

Definición 2.2 *La velocidad instantánea es el límite de la relación $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ cuando Δt se aproxima al valor cero.*

$$v_x(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

Pendiente de la línea tangente a la curva x función de t .

La **rapidez instantánea** te permite obtener información sobre la rapidez de un cuerpo en un instante de tiempo determinado y en un punto específico del recorrido.

Definición 2.3 *La rapidez instantánea esta dada por:*

$$r(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

La rapidez instantánea se basa en la trayectoria del objeto.

La **aceleración instantánea** es el límite del cociente $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ cuando Δt tiende a cero. Si representamos la velocidad en función del tiempo, la aceleración instantánea en el tiempo t se define como la pendiente de la línea tangente a la curva en ese tiempo.

Definición 2.4 *La aceleración instantánea esta dada por:*

$$a_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt}$$

Pendiente de la línea tangente a la curva de v en función de t .

Definición 2.5 *La velocidad angular ω es el arco recorrido θ , expresado en radianes por unidad de tiempo. La velocidad angular en el instante t_0 es:*

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\theta_0 - \theta_t}{t_0 - t} = \frac{d\theta}{dt}, \quad (2.2)$$

siendo θ_0 el ángulo en el instante t_0 y θ_t el ángulo en el instante t .

Por norma general, se calcula puntualmente mediante los límites en cada uno de los instantes.

Definición 2.6 La *aceleración angular* α de un objeto es la relación con la cual cambia su velocidad angular con respecto al tiempo.

Si la velocidad angular cambia uniformemente de ω_0 a ω_f en un tiempo t , entonces

$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_0}{t}. \quad (2.3)$$

Donde ω_0 es la velocidad angular inicial y ω_f es la velocidad angular final.

Definición 2.7 La *energía potencial* es la energía que un objeto posee debido a su posición en un campo de fuerzas.

La energía potencial se asocia con las fuerzas que actúan sobre un cuerpo de tal manera que esto sólo depende de la posición del cuerpo en el espacio; estas fuerzas pueden ser representadas por un vector en cualquier punto del espacio formando lo que se conoce como campo vectorial de fuerzas o campo de fuerzas.

Definición 2.8 La *energía cinética* es la energía asociada a los cuerpos que se encuentran en movimiento, depende de la masa y de la velocidad del cuerpo y se representa a través de la siguiente ecuación:

$$E_c := \frac{1}{2}mv^2, \quad (2.4)$$

donde

E_c := energía cinética medida en Joules (J),

m := masa medida en kilogramos (Kg),

v := velocidad medida en metros sobre segundo (m/s).

Definición 2.9 El *movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA)* es el movimiento de una partícula o cuerpo por una línea recta con una aceleración constante.

El movimiento uniformemente acelerado puede describirse por las **cinco ecuaciones de movimiento**:

$$\begin{aligned}x &= \bar{v}t, \\ \bar{v} &= \frac{v_f + v_0}{2}, \\ a &= \frac{v_f - v_0}{t}, \\ v_f^2 &= v_0^2 + 2ax, \\ x &= v_0t + \frac{at^2}{2}.\end{aligned}$$

Definición 2.10 *Cualquier movimiento sobre un camino curvo, representa un movimiento acelerado, y por tanto requiere una fuerza dirigida hacia el centro de la curvatura del camino. Esta fuerza se llama **fuerza centrípeta** que significa fuerza "buscando el centro". La fuerza tiene la magnitud*

$$F_{cen} = m \frac{v^2}{r}, \quad (2.5)$$

donde

$m :=$ masa,

$v :=$ velocidad y

$r :=$ radio.

Ésta es una fuerza no equilibrada que actúa sobre la masa m que se mueve a lo largo de una trayectoria circular de radio r , para imprimirle la aceleración centrípeta $\frac{v^2}{r}$. A partir de $F = ma$, tenemos

$$F_{cen} = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r.$$

Definición 2.11 *La expresión general para la **energía potencial gravitacional**, surge de la **ley de la gravedad**, y es igual al trabajo realizado contra la gravedad, para llevar una masa a un punto determinado del espacio.*

La forma general de la energía potencial gravitacional de una masa m es:

$$E_{pg} = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r}, \quad (2.6)$$

donde G es la constante gravitacional, M es la masa del cuerpo atractivo, m es la masa del cuerpo atraído y r es la distancia entre sus centros.

La fuerza se acerca a cero para grandes distancias, y por tanto cobra sentido elegir el cero de energía potencial gravitacional a una distancia exterior infinita. Entonces, la energía potencial gravitacional cerca de un planeta es negativa, puesto que la gravedad realiza un trabajo positivo cuando se acerca la masa.

Recordando que el trabajo es el producto de una fuerza aplicada sobre un cuerpo y del desplazamiento del cuerpo en la dirección de esta fuerza. Mientras se realiza trabajo sobre el cuerpo, se produce una transferencia de energía al mismo, por lo que puede decirse que el trabajo es energía en movimiento.

Definición 2.12 *Principio de conservación de la energía mecánica:* En un sistema aislado², se mantiene constante la energía total del sistema. Es decir, la energía se conserva.

$$E_m = E_c + E_p = E_T, \quad (2.7)$$

donde $E_m :=$ energía mecánica.

Definición 2.13 La *velocidad de escape* es la velocidad con la que debe lanzarse un cuerpo para que llegue al infinito con velocidad cero. Es decir, es la velocidad mínima con la que debe lanzarse el cuerpo para que escape de la atracción gravitatoria de la Tierra o de cualquier otro astro.

Se a establecido de manera universal la velocidad de escape de la gravedad terrestre como $v = 11.2km/s = 40.320km/h$.

Definición 2.14 En física, el *campo gravitatorio o campo gravitacional* es un campo de fuerzas que representa la gravedad.

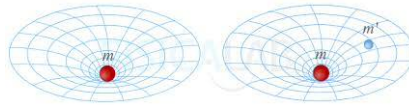


Figura 2.4: Campo gravitatorio.

²Un sistema aislado es aquel que no puede intercambiar energía, ni materia (masa) con su entorno.

2.1.5. Gradiente, lagrangiano y hamiltoniano

Definición 2.15 Si $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable, **el gradiente** de f en (x, y, z) es el vector dado por

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right),$$

este vector también se denota por $\nabla f(x, y, z)$. Por tanto, ∇f es la matriz de la derivada Df escrita como vector.

El **lagrangiano** es una función escalar a partir de la cual se puede obtener la evolución temporal, las leyes de conservación y otras propiedades importantes de un sistema dinámico. De hecho, en física moderna el lagrangiano se considera el operador más fundamental que describe un sistema físico.

Definición 2.16 Se define el **lagrangiano** como la diferencia entre su energía cinética E_c y su energía potencial E_p :

$$L = E_c - E_p.$$

El estado de un sistema viene definido por su posición definida por sus coordenadas q_1, q_2, \dots, q_R y su velocidad definida por las derivadas $\frac{dq_1}{dt}, \frac{dq_2}{dt}, \dots, \frac{dq_R}{dt}$ de aquellas coordenadas respecto al tiempo. Se puede representar la posición del sistema en cada instante en un espacio de R dimensiones, el espacio de configuración³, por un punto M cuyas coordenadas en este espacio son q_1, q_2, \dots, q_R . El objeto de la Mecánica Clásica consiste en formular las leyes de evolución del sistema en función del tiempo, o, si se prefiere, las leyes del movimiento de su punto representativo M , en el espacio de configuración.

Se pueden escribir las leyes del movimiento introduciendo una cierta función característica del sistema, la función de Lagrange.

$$L \equiv L(q_1, q_2, \dots, q_R; \frac{dq_1}{dt}, \frac{dq_2}{dt}, \dots, \frac{dq_R}{dt}; t).$$

³Es el espacio de todas las posibles posiciones instantáneas de un sistema mecánico. Los sistemas mecánicos son aquellos sistemas constituidos fundamentalmente por componentes, dispositivos o elementos que tienen como función específica transformar o transmitir el movimiento desde las fuentes que lo generan, al transformar distintos tipos de energía.

Las coordenadas q satisfacen a las R ecuaciones diferenciales de segundo orden (ecuaciones de Lagrange):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \frac{dq_r}{dt}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_r} = 0$$

con $r = 1, 2, \dots, R$.

Las cantidades $p_r \equiv \frac{\partial L}{\partial (\frac{dq_r}{dt})}$, con $r = 1, 2, \dots, R$, que intervienen en estas ecuaciones, se llaman momentos conjugados de Lagrange.

Otra forma particularmente útil es la forma canónica de Hamilton, definimos la función de Hamilton:

$$H \equiv H(q_1, q_2, \dots, q_R; p_1, p_2, \dots, p_R; t) = \sum_{r=1}^R \frac{dq_r}{dt} \frac{\partial L}{\partial \frac{dq_r}{dt}} - L.$$

Las ecuaciones del movimiento se ponen en la forma canónica

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r}$$

con $r = 1, 2, \dots, R$. Son ecuaciones diferenciales de primer orden. Basta con conocer las coordenadas y los momentos en el instante inicial para determinar su valor en cualquier instante posterior. Así, cuando H no depende del tiempo, por todo punto p del espacio pasa una y solo una trayectoria que representa un movimiento posible del sistema.

En algunos casos, L es la diferencia entre la energía cinética T y la energía potencial V , $H = T + V$ es la energía total del sistema expresada en función de las q y de las p . De las ecuaciones de Hamilton se deduce que

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Definición 2.17 Momento Conjugado. Para esta definición vamos a suponer que un punto material de masa m está en movimiento en un sistema de referencia ortonormal⁴ (O, x, y, z) . Si $T = \frac{1}{2}m((\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 + (\frac{dz}{dt})^2)$ es su energía cinética y $V(x, y, z)$ su energía potencial, su lagrangiano tiene por expresión: $L(x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, t) = E_c - E_p$. El momento conjugado respecto a x es, por definición: $p_x = \frac{\partial L}{\partial (\frac{dx}{dt})}$. Análogamente, los momentos conjugados de y y z son: $p_y = \frac{\partial L}{\partial (\frac{dy}{dt})}$, $p_z = \frac{\partial L}{\partial (\frac{dz}{dt})}$, respectivamente.

⁴Un sistema de referencia es ortonormal cuando los vectores de la base del sistema son perpendiculares entre sí y unitarios.

2.2. Definiciones Matemáticas

Notemos que el área de matemáticas es no sólo un conjunto de ideas y formas de actuar que conllevan la utilización de cantidades y formas geométricas, sino que también ayuda a obtener modelos que, al analizar los fenómenos y situaciones que se presentan en la realidad se pueda obtener información y conclusiones que inicialmente no estaban explícitas.

En este capítulo daremos a conocer definiciones que nos ayudaran con el análisis matemático del cómo se estableció el conjunto de cuatro ecuaciones diferenciales no lineales que son las ecuaciones del movimiento de la nave.

2.2.1. Ecuaciones Diferenciales

En las matemáticas aplicadas, las funciones usualmente representan cantidades físicas, las derivadas representan sus razones de cambio, y la ecuación define la relación entre ellas.

Definición 2.18 *El orden de una ecuación diferencial es el de la derivada que aparece con mayor exponente en la ecuación.*

Generalizando, la ecuación

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

*donde $x \in \mathbb{R}^n$ y y' son las derivadas, se llama una **ecuación diferencial ordinaria** de orden n -ésimo.*

Con restricciones apropiadas de la función F , en esta ecuación puede despejarse explícitamente $y^{(n)}$ en función de las otras variables $n+1$, $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$, para obtener

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

Ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias son

$$\frac{dy}{dx} - 4y = 2,$$

$$(x + 2y)dx - 3ydy = 0, \quad (2.8)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4 \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 + 3y = 0, \quad (2.9)$$

mientras que,

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = u, \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4 \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (2.11)$$

son ecuaciones en derivadas parciales.

Definición 2.19 Una *ecuación diferencial ordinaria lineal* $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de orden n en la variable dependiente y y en la variable independiente x es una ecuación que puede expresarse de la forma:

$$a_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + a_n(x) y = g(x);$$

donde $a_0(x)$ es una función no idénticamente nula.

Definición 2.20 Decimos que una función $y = \varphi(x)$ definida en un intervalo I (es decir $\varphi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) es **solución** de una ecuación diferencial en el intervalo si, sustituida en dicha ecuación, la satisface.

El principal objetivo del teorema de Taylor de una variable es encontrar aproximaciones a una función cerca de un punto dado que sean precisas con un orden mayor que el de la aproximación lineal.

Teorema 2.1 *Fórmula de Taylor de primer orden.* Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en $x_0 \in U$. Entoces

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) + R_1(x_0, h),$$

donde $R_1(x_0, h) \parallel \|h\| \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow 0$ en \mathbb{R}^n .

Capítulo 3

El problema de dos y tres cuerpos

El problema de los tres cuerpos consiste en determinar, en cualquier instante, las posiciones y velocidades de tres cuerpos, de cualquier masa, sometidos a atracción gravitacional mutua y partiendo de unas posiciones y velocidades dadas. Mientras que el problema de los dos cuerpos tiene solución mediante el método de las cuadraturas integrales [9], el problema de tres cuerpos no tiene solución general por dicho método y en algunos casos su solución puede ser caótica en el sentido físico, lo que significa que pequeñas variaciones en las condiciones iniciales pueden llevar a destinos totalmente diferentes.

3.1. Problema de dos cuerpos

En la mecánica clásica, **el problema de dos cuerpos** es determinar el movimiento de dos partículas puntuales que solo interactúan entre sí. Los ejemplos comunes incluyen un satélite orbitando un planeta, un planeta orbitando una estrella, dos estrellas orbitando entre sí (una estrella binaria) y un electrón clásico orbitando un núcleo atómico.

Las leyes de Newton nos permite reducir el problema de **dos cuerpos** a un problema de **un cuerpo** equivalente, es decir, a resolver el movimiento de una partícula sometida a un campo gravitatorio conservativo y que por tanto deriva de un potencial externo. El problema puede resolverse exactamente, el problema de dos cuerpos correspondiente también puede resolverse con exactitud. El problema de n cuerpos con $n \geq 3$, no puede resolverse, excepto

en casos especiales.

3.1.1. Descripción del problema

Sean x_1 , x_2 las posiciones de dos cuerpos, y m_1 , m_2 sus masas. La **segunda ley de Newton** determina que

$$F_{1,2}(x_1, x_2) = m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2}, \quad (3.1)$$

$$F_{2,1}(x_1, x_2) = m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2}, \quad (3.2)$$

donde $F_{1,2}$ es la fuerza en la masa 1 debido a su interacción con la masa 2, y $F_{2,1}$ es la fuerza en la masa 2 respecto a la masa 1.

Nuestro objetivo es determinar las trayectorias $x_1(t)$ y $x_2(t)$ en todo instante t , dadas las posiciones iniciales $x_1(t=0)$ y $x_2(t=0)$ y las velocidades iniciales $v_1(t=0)$ y $v_2(t=0)$.

3.2. Problema de tres cuerpos

El problema de los tres cuerpos es uno de esos típicos problemas matemáticos de apariencia sencilla, que encierra una tremenda complejidad. El origen de dicho problema proviene de la famosa Ley de Gravitación Universal de Newton. También aparece en este problema la segunda Ley de Newton, o principio fundamental de la dinámica.

El problema de los tres cuerpos consiste en determinar, en cualquier instante, las posiciones y velocidades de tres cuerpos, de cualquier masa, sometidos a atracción gravitacional mutua y partiendo de unas posiciones y velocidades dadas.

3.2.1. El problema de los tres cuerpos restringido

El problema de los tres cuerpos restringido asume que la masa de uno de los cuerpos es despreciable; el problema de los tres cuerpos restringido circular es un caso especial en que se asume que dos de los cuerpos están en órbitas circulares (lo cual es aproximadamente cierto para el sistema Sol-Tierra-Luna).

El problema restringido (circular y elíptico) fue estudiado extensamente por muchos matemáticos y físicos famosos, como Joseph-Louis Lagrange en el siglo XVIII y Henri Poincaré al final del siglo XIX. En el problema circular, existen cinco puntos de equilibrio llamados puntos de Lagrange. Tres de estos puntos son colineales con las masas principales y estos puntos son inestables. Los otros dos se localizan en el tercer vértice formando con las dos masas principales triángulos equiláteros. Estos puntos son estables.

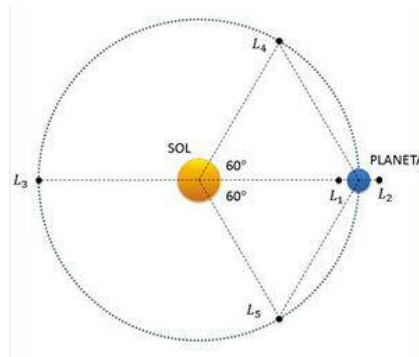


Figura 3.1: Problema circular.

Capítulo 4

Métodos numéricos de un paso

Frecuentemente un problema de valor inicial (PVI) es demasiado complicado como para que se pueda resolver analíticamente, de manera que se emplea entonces una de dos posibles técnicas para aproximar su solución. La primera técnica consiste en simplificar la EDO, obteniendo otra que pueda resolverse exactamente, y usar después la solución de la ecuación simplificada como aproximación de la solución de la ecuación original. La otra técnica consiste en construir métodos que aproximen directamente la solución del problema original.

En este capítulo daremos a conocer algunos métodos numéricos de un paso que utilizaremos para darle solución a nuestro problema. Los métodos que consideraremos no proporcionan una aproximación continua a la solución del PVI, sino aproximaciones del valor de la solución en un conjunto de puntos.

Definición 4.1 La *interpolación* consiste en hallar un dato dentro de un intervalo en el que conocemos los valores en los extremos.

La *extrapolación* consiste en hallar un dato fuera del intervalo conocido, pero debe tenerse en cuenta que esté próximo a uno de sus extremos, pues en otro caso no es muy fiable el resultado obtenido.

Los siguientes métodos descritos en este capítulo corresponden a la solución de la siguiente ecuación.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0.\end{aligned}$$

4.1. Método de Euler

Una de las técnicas más simples para aproximar soluciones de ecuaciones diferenciales es conocida como **Método de Euler** o método de las **tangentes**. Supongamos que queremos aproximar la solución del problema de valores iniciales

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0.\end{aligned}$$

Notemos que $y'(x)$ evaluada en un punto x_0 , es la pendiente de la tangente a la gráfica de $y(x)$ en este punto. Como el problema de valor inicial establece el valor de la derivada de la solución en (x_0, y_0) , la pendiente de la tangente a la curva solución en este punto es $f(x_0, y_0)$. Si recorremos una distancia corta por la línea tangente obtenemos una aproximación a un punto cercano de la curva de solución. A continuación se repite el proceso en el punto nuevo.

Para formalizar este procedimiento se emplea la **linealización**

$$L(x) = \frac{dy}{dt}(x_0)(x - x_0) + y_0,$$

de $y(x)$ en $x = x_0$. La gráfica de esta linealización, la Figura (4.1), es una recta tangente a la gráfica de $y = y(x)$ en el punto (x_0, y_0) .

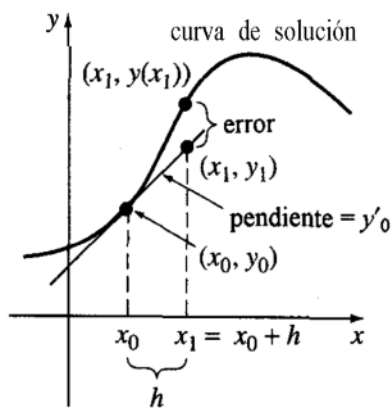


Figura 4.1: Linealización.

Si h es un incremento positivo sobre el eje x , entonces, como lo muestra la Figura (4.1), podemos encontrar un punto $(x_1, y_1) = (x_0 + h, y_1)$ sobre la

tangente en (x_0, y_0) a la curva solución desconocida.

De la ecuación de una recta por un punto dado, tenemos

$$\frac{y_1 - y_0}{(x_0 + h) - x_0} = \frac{dy_0}{dt},$$

o bien

$$y_1 = y_0 + h \frac{dy_0}{dt},$$

en donde $\frac{dy_0}{dt} = f(x_0, y_0)$. Si denotamos $x_0 + h$ por x_1 , entonces el punto (x_1, y_1) sobre la tangente es una aproximación del punto $(x_1, y(x_1))$ sobre la curva solución. Esto es, $y_1 \approx y(x_1)$. Por supuesto, la exactitud de la aproximación depende mucho del tamaño del incremento h . Usualmente debemos elegir el tamaño de esta medida de modo que sea "razonablemente pequeña". Suponiendo que h tiene un valor uniforme (constante), podemos obtener una sucesión de puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ que sean aproximaciones de los puntos $(x_1, y(x_1)), (x_2, y(x_2)), \dots, (x_n, y(x_n))$. Véase la Figura (4.2).

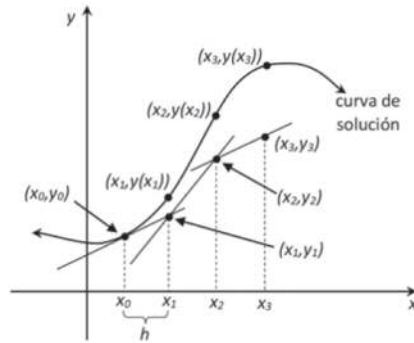


Figura 4.2: Sucesión de puntos.

Ahora bien, usando (x_1, y_1) podemos obtener el valor de y_2 que es la ordenada de un punto sobre una nueva "tangente". Tenemos

$$\frac{y_2 - y_1}{h} = \frac{dy_1}{dt}$$

o bien

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + h \frac{dy_1}{dt} \\ &= y_1 + hf(x_1, y_1). \end{aligned}$$

En general se obtiene que

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h \frac{dy_n}{dt} \\ &= y_n + hf(x_n, y_n), \end{aligned} \tag{4.1}$$

en donde $x_n = x_0 + nh$.

4.2. Método de Runge-Kutta

Esquemas más sofisticados, que permiten alcanzar un orden de precisión superior, son los métodos de Runge-Kutta, sin embargo, requiere de varias evaluaciones de la función sobre cada intervalo.

4.2.1. Preliminares del método de Runge-Kutta

Sea la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

con la condición inicial $y(x_0) = y_0$, que pretendemos resolver en el intervalo $[a, b]$. Para ello, consideramos un conjunto de puntos de $[a, b]$, equiespaciados¹, entre los cuales está el punto x_0 . En general dado un paso h arbitrario, $[x_0 - mh, x_0 + mh]$ no coincide con $[a, b]$, es decir, los extremos a y b no coincidirán con puntos de división. Esto carece de importancia y escogeremos el intervalo de máxima longitud $[x_0 - mh, x_0 + mh]$ contenido en $[a, b]$. Sea $y(x)$ una solución exacta de la ecuación e $y_j \approx y(x_j)$ los valores aproximados resultando del cálculo numérico. En dichos métodos, el valor aproximado de $y(x_{j+1})$ viene dado mediante

$$y_{j+1} = y_j + hg(x_j, y_j, f, h),$$

Por ejemplo, desarrollando en serie de Taylor,

$$y_{j+1} = y_j + hy_j' + \frac{h^2}{2}y_j'' + \frac{h^3}{6}y_j''' + O(h^4).$$

¹Son puntos que se encuentran siempre a una misma distancia uno del otro.

Usando la aproximación más simple se obtiene el *método de Euler*, $y_{j+1} = y_j + hf(x_j, y_j)$, en el que se observa que g es la propia función f de la ecuación diferencial, es decir, la pendiente en (x_j, y_j) .

En el método de *Runge-Kutta (RK)*, g es una medida ponderada de valores de $f(x, y)$ en el intervalo $[x_j, x_{j+1}]$, y se dice que es de orden m si alcanza una precisión equiparable a la del desarrollo de *Taylor* de ese orden.

Un *RK* de tercer orden viene dado por

$$y_{j+1} = y_j + h[ak_1 + bk_2 + ck_3],$$

con

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_j, y_j), \\ k_2 &= f(x_j + \lambda h, y_j + \mu hk_1), \\ k_3 &= f(x_j + \lambda_2 h, y_j + \mu_2 k_2 + (\lambda_2 - \mu_2)hk_1). \end{aligned}$$

Los tres pesos, a, b, c y los cuatro coeficientes λ, μ, λ_2 y μ_2 se calculan desarrollando k_2 y k_3 en serie de *Taylor* de dos variables hasta orden h^2 , e identificando los factores que multiplican a h, h^2 y h^3 con los correspondientes del desarrollo de *Taylor* de una variable de $y(x_j + h)$. El sistema de ecuaciones así obtenido es indeterminado, y sus distintas soluciones corresponden a diferentes esquemas *RK*.

4.2.2. Ordenes del Método de Runge-Kutta

Es probable que uno de los procedimientos numéricos más difundidos y a la vez más exactos para obtener soluciones aproximadas al problema de valor inicial $\frac{dy}{dt} = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ sea el **método de Runge-Kutta de cuarto orden (RK4)**. Como indica el nombre, hay métodos de Runge-Kutta de distintos órdenes, los cuales se deducen a partir del desarrollo de $y(x_n + h)$ en serie de Taylor.

$$\begin{aligned} y(x_{n+1}) &= y(x_n + h) \\ &= y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_n) + \cdots + \frac{h^{k+1}}{(k+1)!}y^{k+1}(c), \end{aligned}$$

en donde c es un número entre x_n y $x_n + h$. Cuando $k = 1$ y el residuo $\frac{h^2}{2}y''(c)$ es pequeño, se obtiene la fórmula acostumbrada de iteración

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n = y_n + hf(x_n, y_n).$$

En otras palabras, el método básico de Euler es un **procedimiento de Runge-Kutta de primer orden**.

Pasemos ahora al **procedimiento de Runge-Kutta de segundo orden**.

Consiste en hallar las constantes a, b, α y β tales que la fórmula

$$y_{n+1} = y_n + ak_1 + bk_2, \quad (4.2)$$

en la cual,

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n), \\ k_2 &= hf(x_n + \alpha h, y_n + \beta k_1), \end{aligned}$$

coincide con un polinomio de Taylor de segundo grado en el mayor número posible de términos.

El propósito es lograr la exactitud del método de Taylor sin necesidad de tener que calcular derivadas de orden superior. Se puede demostrar que esto es posible siempre y cuando las constantes cumplan con

$$a + b = 1, \quad b\alpha = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad b\beta = \frac{1}{2}.$$

Este es un sistema de tres ecuaciones con cuatro incógnitas y tiene una cantidad infinita de soluciones.

4.3. Ejemplos aplicando Euler y Runge-Kutta

Una ecuación diferencial no siempre debe poseer una solución, e incluso cuando exista alguna es posible que no podamos presentarla en forma explícita o implícita², entonces debemos darnos por satisfechos con una aproximación a la solución.

En esta sección damos ejemplos de sistemas de una, dos, tres y cuatro ecuaciones en los cuales aplicamos el método de Euler y de Runge-Kutta para obtener los posibles valores solución y hacer la comparación entre los

²Una función es explícita si viene dada como $y = f(x)$, es decir, la variable dependiente y está despejada. Una función es implícita si viene dada de la forma $f(x, y) = 0$, es decir, si la función se expone como una expresión algebraica igualada a 0.

resultados de un método y otro, obteniendo así conclusiones que nos dirán cual método es más aproximado.

Si desea conocer el programa en Matlab que utiliza cada uno de los ejemplos se sugiere consultar el Apéndice A.

◆ Ejemplo de una ecuación diferencial lineal donde se aplica el método de Euler y el de Runge-Kutta.

Ejemplo 4.1 Consideremos el problema de valor inicial $\frac{dy}{dt} = 2xt$, $y(1) = 1$. Úsese el método de Euler y Runge-Kutta para obtener una aproximación de y en el tiempo (1.5) empleando $h = 0.1$.

Datos:

Tiempo inicial: 1

Tiempo final: 1.5

Número de intervalos: 5

Valor de x en el tiempo inicial: 1

La tabla (4.1) muestra los resultados obtenidos entre las aproximaciones de los dos métodos, donde $t := tiempo$, $yEuler(Ve) :=$ valor de y utilizando método de Euler, $yRk4(Vrk4) :=$ valor de y utilizando método de Runge-Kutta de cuarto orden, $Vv :=$ valor verdadero, $Error_{ve} :=$ error que existe entre el valor verdadero y el valor encontrado con el método de Euler, $Error_{vrk4} :=$ error que existe entre el valor verdadero y el valor encontrado con el método de Runge-Kutta de cuarto orden, lo anterior se utilizara en los siguientes ejemplos para identificar los resultados:

t	$yEuler(Ve)$	$yRk4(Vrk4)$	Vv
1.00	1.0000	1.0000	1.0000
1.10	1.2000	1.2337	1.2337
1.20	1.4640	1.5527	1.5527
1.30	1.8154	1.9937	1.9937
1.40	2.2874	2.6116	2.6117
1.50	2.9278	3.4902	3.4904

Cuadro 4.1: Tabla de valores.

$Error_{ve} = Vv - Ve$	$Error_{vrk4} = Vv - Vrk4$
0.0000	0.0000
0.0337	0.0000
0.0887	0.0000
0.1784	0.0000
0.3244	0.0001
0.5625	0.0002

Cuadro 4.2: Errores estimados.

En la tabla (4.2) podemos observar que el método de Runge-Kutta es mas exacto que el método de Euler.

Se muestra que el margen de Error (para profundizar mas sobre el error ver [2]) de los valores para x utilizando Euler con los valores verdaderos es mas grande que el margen de Error de los valores para x utilizando Runge-Kutta con los Valores Verdaderos.

- Gráfica de la solución aproximada al problema de valor inicial para x utilizando Euler.

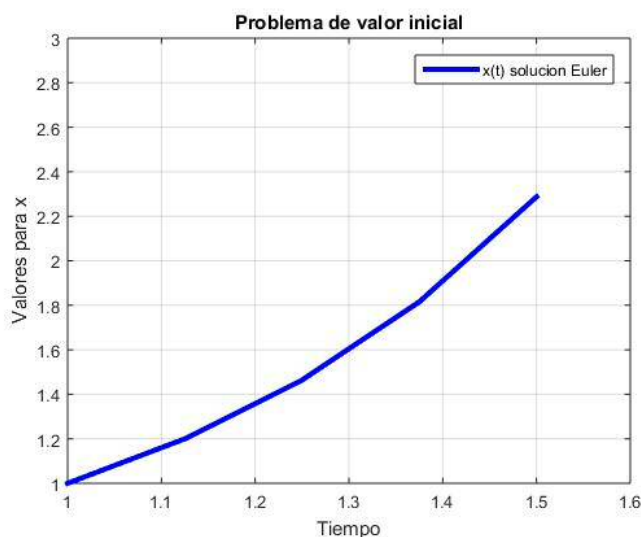


Figura 4.3: Gráfica de la función solución.

- Gráfica de la solución aproximada al problema de valor inicial para x

utilizando Runge-Kutta.

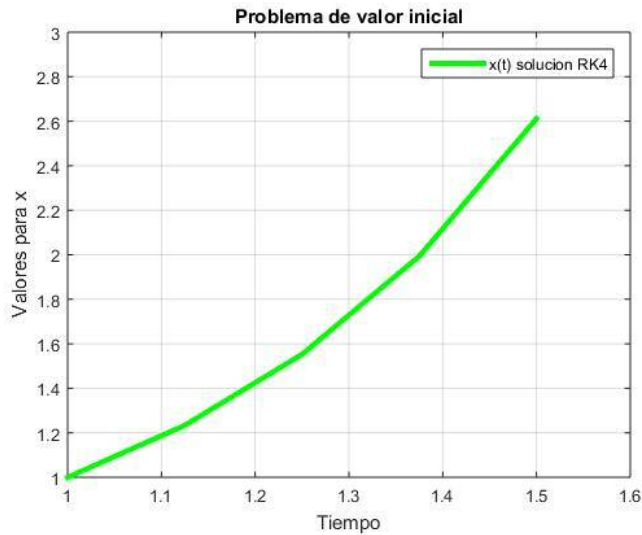


Figura 4.4: Gráfica de la función solución.

◆ Ejemplo de dos ecuaciones diferenciales lineales donde se aplica el método de Euler y el de Runge-Kutta.

Ejemplo 4.2 Consideremos el problema de valores iniciales

$$\frac{dx}{dt} = 2x + 4y, \quad \frac{dy}{dt} = -x + 6y,$$

$$x(0) = -1, \quad y(0) = 6.$$

Úsese el método de Euler y Runge-Kutta para obtener una aproximación de $x(0.6)$, $y(0.6)$ empleando $h = 0.1$.

Datos:

Tiempo inicial: 0

Tiempo final: 0.6

Número de intervalos: 6

Valor de x en el tiempo inicial: -1

Valor de y en el tiempo inicial: 6

La tabla (4.3) muestra los resultados obtenidos entre las aproximaciones de los dos métodos para la variable x .

t	$x_{Euler}(Ve)$	$x_{Rk4}(Vrk4)$	Vv
0.00	-1.0000	-1.0000	-1.0000
0.10	1.2000	2.3840	2.3869
0.20	4.7200	9.3379	9.3472
0.30	10.3520	22.5540	22.5767
0.40	19.3630	46.5100	46.5585
0.50	33.7810	88.5730	88.6686
0.60	56.8500	160.7600	160.9383

Cuadro 4.3: Tabla de valores.

$Error_{ve} = Vv - Ve$	$Error_{vrk4} = Vv - Vrk4$
0.0000	0.0000
1.1869	0.0029
4.6272	0.0093
12.2247	0.0227
27.1955	0.0485
54.8876	0.0956
104.0883	0.1783

Cuadro 4.4: Errores estimados..

Se muestra que el margen de Error de los valores de x utilizando Euler con los Valores Verdaderos es mas grande que el margen de Error de los valores de x utilizando Runge-Kutta con los Valores Verdaderos.

La tabla (4.5) muestra los resultados obtenidos entre las aproximaciones de los dos metodos para la variable y .

t	$yEuler(Ve)$	$yRk4(Vrk4)$	Vv
0.00	6.0000	6.0000	6.0000
0.10	8.2000	10.8880	10.8903
0.20	11.7200	19.1330	19.1396
0.30	17.3520	32.8540	32.8691
0.40	26.3630	55.4420	55.4739
0.50	40.7810	92.3010	92.3632
0.60	63.8500	152.0000	152.1198

Cuadro 4.5: Tabla de valores.

$Error_{ve} = Vv - Ve$	$Error_{vrk4} = Vv - Vrk4$
0.0000	0.0000
2.6903	0.0023
7.4196	0.0066
15.5171	0.0151
29.1109	0.0319
51.5822	0.0622
88.2698	0.1198

Cuadro 4.6: Errores estimados.

Se muestra que el margen de Error de los valores de y utilizando Euler con los Valores Verdaderos es mas grande que el margen de Error de los valores de y utilizando Runge-Kutta con los Valores Verdaderos.

Podemos decir que los valores solución para la variable x y la variable y tienen menos margen de error con los valores verdaderos por el método de Runge-Kutta que por el método de Euler.

- Gráfica de la solución aproximada a el problema de valores iniciales para x y y utilizando Euler.

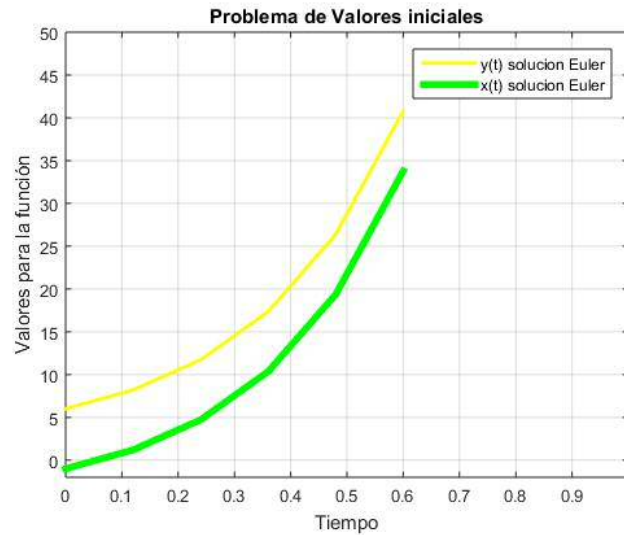


Figura 4.5: Gráfica de la función solución.

- Gráfica de la solución aproximada al problema de valores iniciales para x y y utilizando Runge-Kutta.

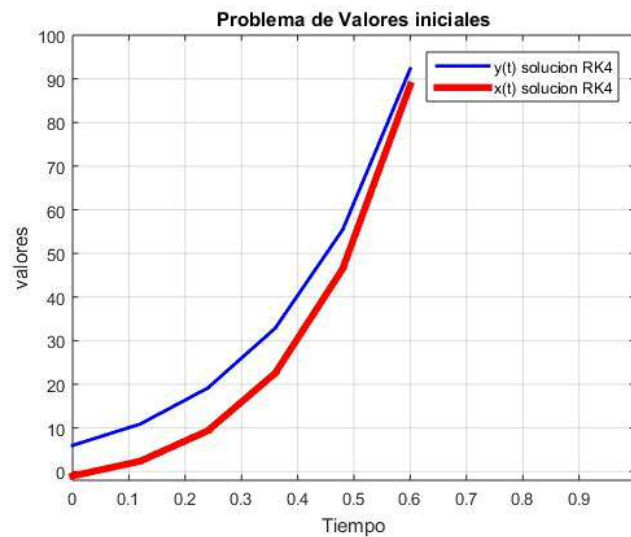


Figura 4.6: Gráfica de la función solución.

- ◆ Ejemplo de tres ecuaciones diferenciales lineales donde se aplica el mé-

todo de Euler y el de Runge-Kutta.

Modelo SIR

El modelo SIR es uno de los modelos epidemiológicos más simples capaces de capturar muchas de las características típicas de los brotes epidémicos. El nombre del modelo proviene de las iniciales S (población susceptible), I (población infectada) y R (población recuperada). El modelo relaciona las variables de las tres poblaciones (Susceptible, Infectada y Recuperada) a través de la tasa de infección y el período infeccioso promedio. Las ecuaciones de este modelo son: $\frac{dS}{dt} = -BSI$, $\frac{dI}{dt} = BSI - vI$, $\frac{dR}{dt} = vI$.

Donde:

B : tasa de infección,

v : tasa de recuperación.

Ejemplo 4.3 Problema epidemiológico Influenza.

En una población de 763 habitantes existe un brote epidemiológico de Influenza, en la cual existen 762 personas susceptibles y 1 persona infectada, dado que es una epidemia con tasa de infección de 0,0026 y tasa de recuperación de 0,5, dicha población estará en observación de 0 a 21 días, se desea conocer la relación que existirá durante ese tiempo entre la población susceptible, la población infectada y la población recuperada.

Solución:

Primero analicemos los datos que tenemos y las variables que representan de acuerdo al modelo SIR.

De acuerdo al problema sabemos que la población es de 763 habitantes, y que en el día 0 existen 762 personas susceptibles, 1 persona infectada y 0 personas recuperadas por lo que podemos considerar: $S(0) = 762$, $I(0) = 1$, $R(0) = 0$, $N = 7$, $B = 0,0026$, $v = 0,5$, $t = 21$ días. Se utilizan los métodos de Euler y Runge-Kutta para conocer la relación que existirá durante 21 días entre la población susceptible, la población infectada y la población recuperada.

Modelo SIR de Influenza (Redefiniendo las variables y ecuaciones)

Las ecuaciones de este modelo son: $\frac{dx}{dt} = -0,0026xy$,

$$\frac{dy}{dt} = 0,0026xy - 0,5y$$

$$\frac{dz}{dt} = 0,5y$$

Donde $x := Susceptibles$, $y := Infectados$ y $z := Recuperados$.

Datos:

Tiempo inicial: 0

Tiempo final: 21

Número de intervalos: 21

Valor de x en el tiempo inicial: 762

Valor de y en el tiempo inicial: 1

Valor de z en el tiempo inicial: 0.

La tabla (4.7) muestra los resultados obtenidos para la variable $x := Susceptibles$.

t	$xEuler(Ve)$	$xRk4(Vrk4)$
0.00	762.0000	762.0000
0.027523	761.95	761.94
0.055046	761.89	761.89
...
2.0092	739.28	737.91
2.0367	738.34	736.89
...
16.018	15.514	15.996
16.046	15.509	15.992
...
20.972	15.204	15.674
21	15.204	15.673

Cuadro 4.7: Tabla de valores.

La tabla (4.8) muestra los resultados obtenidos para la variable $y := Infectados$.

t	$yEuler(Ve)$	$yRk4(Vrk4)$
0.00	1.0000	1.0000
0.027523	1.0408	1.0416
0.055046	1.0832	1.0849
...
2.0092	17.897	18.914
2.0367	18.598	19.666
...
16.018	3.9673	4.0075
16.046	3.9172	3.9572
...
20.972	0.39996	0.41244
21	0.39489	0.40726

Cuadro 4.8: Tabla de valores.

La tabla (4.9) muestra los resultados obtenidos para la variable $z :=$ *Recuperados*.

t	$zEuler(Ve)$	$zRk4(Vrk4)$
0.00	0.0000	0.0000
0.027523	0.013761	0.014046
0.055046	0.028084	0.028676
...
2.0092	5.818	6.1784
2.0367	6.0643	6.4439
...
16.018	743.52	743
16.046	743.57	743.05
...
20.972	747.4	746.91
21	747.4	746.92

Cuadro 4.9: Tabla de valores.

Gráfica de la relación que existirá durante 21 días entre la población

susceptible x , la población infectada y y la población recuperada z utilizando el método de Euler.

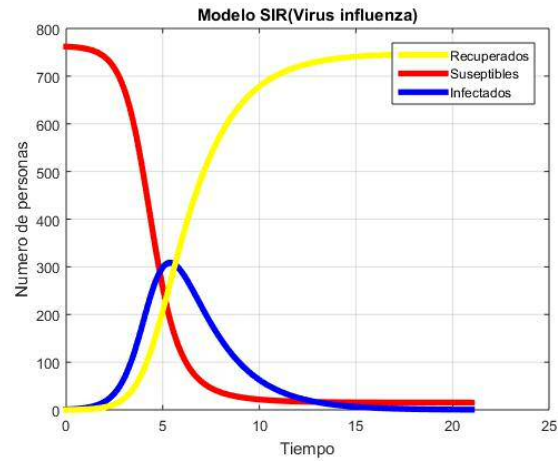


Figura 4.7: Gráfica de la función solución.

Gráfica de la relación que existirá durante 21 días entre la población susceptible x , la población infectada y y la población recuperada z utilizando el método de Runge-Kutta.

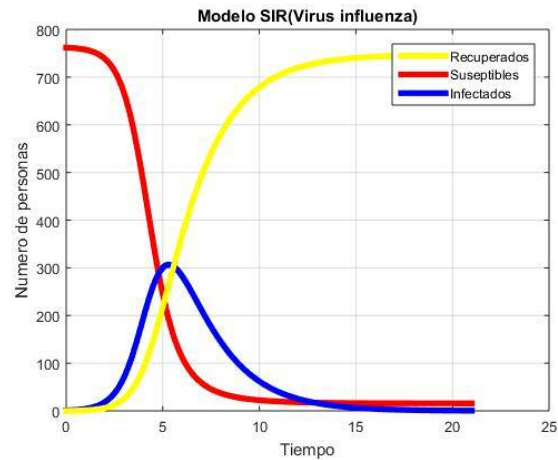


Figura 4.8: Gráfica de la función solución.

Nuestras conclusiones de este ejemplo son:

★Podemos decir que el método de Runge-Kutta nos da una relación más exacta entre la población susceptible x , la población infectada y y la población recuperada z que el método de Euler.

★Durante 0 a 5 días podemos observar en las gráficas que la población infectada crece más rápido que la población recuperada por lo que la población susceptible se convierte en infectada.

★Durante 5 a 15 días se puede observar que la población recuperada crece en comparación con la población infectada que decrece, es decir el virus de influenza va perdiendo fuerza y está siendo eliminado por lo que la población susceptible disminuye convirtiéndose en recuperada.

★Durante 15 a 21 días se puede observar que la población recuperada tiende a ser la población total mientras que la población infectada tiende a ser casi 0, es decir, que el virus de influenza casi desaparece, siendo así que la población susceptible se convierte casi en su totalidad en población recuperada.

◆Ejemplo de cuatro ecuaciones diferenciales lineales donde se aplica el método de Euler y el de Runge-Kutta.

Ejemplo 4.4 Consideremos el problema de valores iniciales

$$\frac{dx}{dt} = x - y + z - w, \quad \frac{dy}{dt} = -y + 2z - 2w,$$

$$\frac{dz}{dt} = 2z - 3w, \quad \frac{dw}{dt} = -2w$$

$$x(0) = 1, \quad y(0) = 2, \quad z(0) = 3, \quad w(0) = 4.$$

Úsese el método de Euler y Runge-Kutta para obtener una aproximación de $x(10)$, $y(10)$, $z(10)$, $w(10)$ empleando $h = 0,2$.

Datos:

Tiempo inicial: 0

Tiempo final: 10

Número de intervalos: 50

Valor de x en el tiempo inicial: 1

Valor de y en el tiempo inicial: 2

Valor de z en el tiempo inicial: 3

Valor de w en el tiempo inicial: 4

La tabla (4.10) muestra los resultados obtenidos entre las aproximaciones de los dos métodos para la variable x .

t	$xEuler(Ve)$	$xRk4(Vrk4)$	Vv
0.0	1	1	1
1	0.07775	0.1354	0.1353
2	0.006046	0.01833	0.0183
3	0.000470	0.00248	0.0024
4	0.0000365	0.000336	0.0003
5	0.00000284	0.0000453	0.000045
6	0.000000221	0.0000061662	0.000006144
7	0.00000001718	0.0000008349	0.000000831
8	0.00000000130	0.00000011244	0.000000112
9	0.000000004460	0.000000010660	0.000000015
10	0.000000007908	0.00000000322	0.000000002

Cuadro 4.10: Tabla de valores.

Se muestra que el margen de Error de los valores de Euler con los Valores Verdaderos es mas grande que el margen de Error de los valores de Runge-Kutta con los Valores Verdaderos para la variable x .

La tabla (4.11) muestra los resultados obtenidos entre las aproximaciones de los dos metodos para la variable y .

t	$yEuler(Ve)$	$yRk4(Vrk4)$	Vv
0.0	2	2	2
1	0.09331	0.27083	0.2706
2	0.012093	0.036674	0.0366
3	0.0009403	0.0049663	0.0049
4	0.00007312	0.000672	0.0006
5	0.00000568	0.00009107	0.000090
6	0.0000004421	0.000012332	0.00001228
7	0.00000003437	0.0000016698	0.000001663
8	0.0000000026	0.00000022488	0.000000225
9	0.000000000089	0.00000002132	0.000000003
10	0.0000000015	0.000000006456	0.000000004

Cuadro 4.11: Tabla de valores.

Se muestra que el margen de Error de los valores de Euler con los Valores Verdaderos es mas grande que el margen de Error de los valores de Runge-Kutta con los Valores Verdaderos para la variable y .

La tabla (4.12)muestra los resultados obtenidos entre las aproximaciones de los dos metodos para la variable z .

t	$zEuler(Ve)$	$zRk4(Vrk4)$	Vv
0.0	3	3	3
1	0.23327	0.40624	0.4060
2	0.01813	0.055012	0.0549
3	0.001410	0.00744	0.0074
4	0.000109	0.001008	0.0010
5	0.00000852	0.0001366	0.000136
6	0.000000663	0.000018498	0.000018432
7	0.0000000515	0.000002504	0.000002494
8	0.0000000039	0.00000033733	0.000000337
9	0.00000000013	0.00000003198	0.000000045
10	0.0000000023	0.00000000968	0.000000006

Cuadro 4.12: Tabla de valores.

Se muestra que el margen de Error de los valores de Euler con los Valores Verdaderos es mas grande que el margen de Error de los valores de Runge-Kutta con los Valores Verdaderos para la variable z .

La tabla (4.13) muestra los resultados obtenidos entre las aproximaciones de los dos metodos para la variable w .

t	$wEuler(Ve)$	$wRk4(Vrk4)$	Vv
0.0	4	4	4
1	0.31104	0.54166	0.5413
2	0.02418	0.07334	0.0732
3	0.00188	0.00993	0.0099
4	0.000146	0.00134	0.0013
5	0.0000113	0.0001821	0.000181
6	0.000000884	0.000024664	0.00002457
7	0.000000068	0.00000334	0.000003326
8	0.00000000534	0.0000004522	0.00000045
9	0.000000000415	0.00000006124	0.00000006
10	0.000000000032	0.00000000829	0.000000008

Cuadro 4.13: Tabla de valores.

Se muestra que el margen de Error de los valores de Euler con los Valores Verdaderos es mas grande que el margen de Error de los valores de Runge-Kutta con los Valores Verdaderos para la variable w .

Podemos decir que los valores solución para la variable x , la variable y , la variable z y la variable w tienen menos margen de error a los valores verdaderos por el método de Runge-Kutta que por el método de Euler.

- Gráfica de la solución aproximada al problema de valores iniciales para x, y, z y w utilizando Euler.

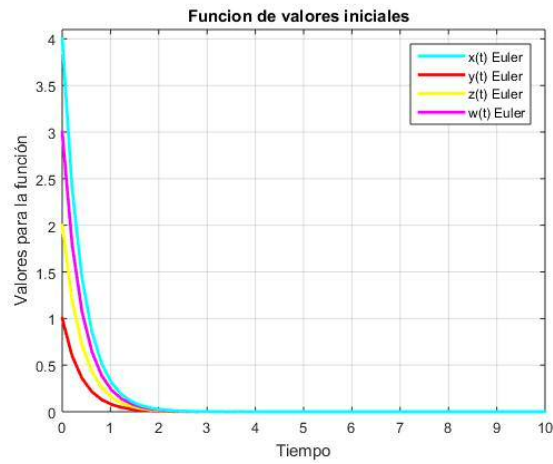


Figura 4.9: Gráfica de la función solución.

- Gráfica de la solución aproximada al problema de valores iniciales para x, y, z y w utilizando Runge-Kutta.

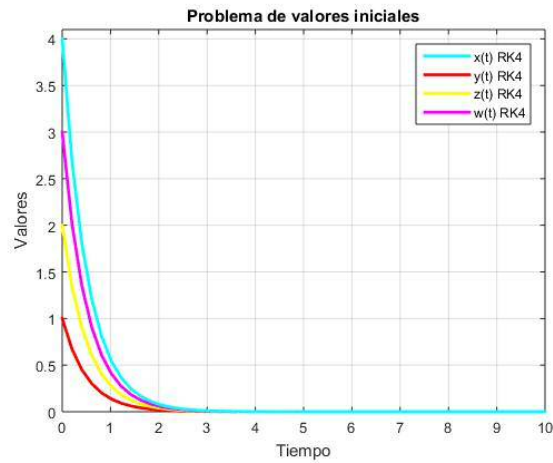


Figura 4.10: Gráfica de la función solución.

Capítulo 5

Modelo (Problema)

Nuestro sistema se compone de tres cuerpos Tierra, Luna y nave espacial que consideramos sin estructura interna y caracterizados de forma única por sus masas, M_T, M_L y m , respectivamente.

La única interacción presente es la gravitatoria. Vamos a suponer, por simplicidad, que todos los cuerpos se mueven en el mismo plano y, además, que la Luna gira con velocidad angular constante alrededor de la Tierra en una órbita de radio fijo r_1 . La nave parte de la superficie terrestre con velocidad v_0 y ángulo $\phi(t)$ con respecto a unos ejes arbitrarios centrados en la Tierra que suponemos fija, vease la figura (5.1).

Finalmente, la nave puede gastar una cierta cantidad de energía E en cambiar de velocidad mediante la acción de un motor. Supondremos que este motor funciona como un impulso instantáneo.

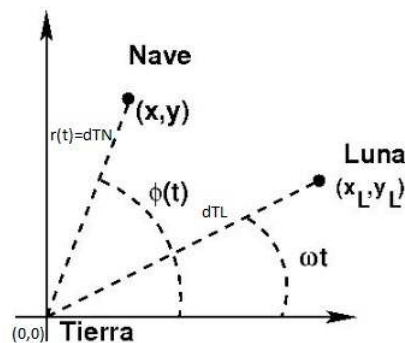


Figura 5.1: Modelo

Tomamos como origen del sistema de referencia el centro de la Tierra que tendrá por coordenadas $(0, 0)$. La luna, puesto que se mueve con velocidad angular ω constante alrededor de la Tierra, tendrá las coordenadas respecto del tiempo

$$x_L(t) = r_1 \cos(\omega t) \text{ e } y_L(t) = r_1 \sin(\omega t). \quad (5.1)$$

expresadas como coordenadas polares, donde $r_1 = d_{TL} = (x_L(t)^2 + y_L(t)^2)^{\frac{1}{2}}$, vease la Figura (5.2).

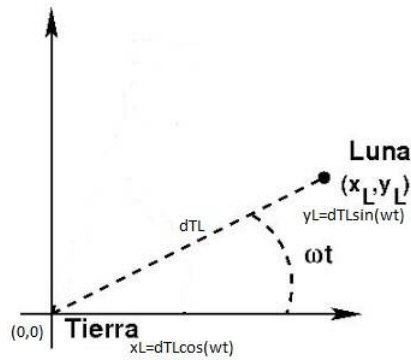


Figura 5.2: Tierra-Luna

Falta encontrar las ecuaciones del movimiento de la nave espacial. Sean $x(t)$ e $y(t)$ las coordenadas de la nave en el instante t . Puesto que la interacción tiene simetría polar¹, conviene trabajar con coordenadas polares por lo que:

$$x(t) = r(t) \cos \phi(t), \quad y(t) = r(t) \sin \phi(t), \quad (5.2)$$

donde $r(t) = [x(t)^2 + y(t)^2]^{\frac{1}{2}}$ es la distancia cuadrática de la nave a la Tierra, vease la Figura (5.5).

¹La ecuación será simétrica al eje polar si al remplazar (r, θ) por $(r, -\theta)$ o por $(-r, \pi - \theta)$ se obtiene una ecuación equivalente. Saber que la ecuación es simétrica el eje polar nos permite restringir los valores de θ a los que están entre 0 y π .

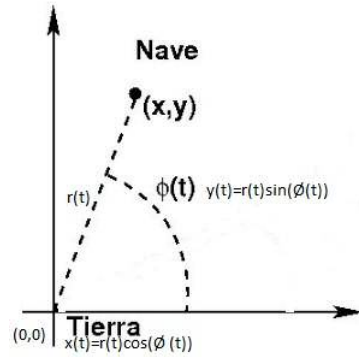


Figura 5.3: Nave-Tierra

Con los datos anteriores podemos calcular la distancia de la nave a la Luna, la energía cinética y potencial de la nave. Sea $\gamma = \phi(t) - \omega t$ el ángulo formado por la nave-Tierra-Luna, véase la Figura (5.4).

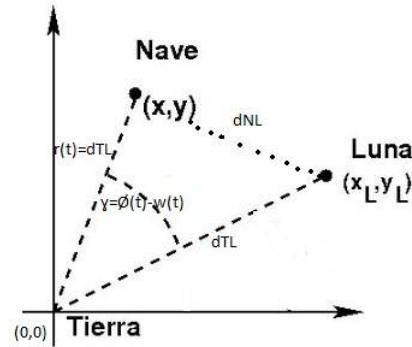


Figura 5.4: Ángulo gamma

En coordenadas polares la distancia de la nave a la Luna denotada por $r_2(t)$ es, por aplicación de la ley de cosenos:

$$\begin{aligned}
 r_2(t) &= \sqrt{(r(t))^2 + (r_1)^2 - 2r(t)r_1\cos(\phi(t) - \omega t)} \\
 &= [r(t)^2 + (r_1)^2 - 2r(t)r_1\cos(\phi(t) - \omega t)]^{\frac{1}{2}} \\
 &= r_L(t, r, \phi)
 \end{aligned}
 \tag{5.3}$$

Definamos la posición de la nave como:

$$N(t) = (x(t), y(t)) = (r(t)\cos\phi(t), r(t)\sin\phi(t)).$$

Así, la velocidad de la nave esta dada por:

$$v(t) = \mathcal{V}(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right),$$

por lo que el producto punto de la velocidad de la nave es:

$$v \cdot v = \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2.$$

Por definición, la energía cinética de un objeto en movimiento está dada por $T = E_c = \frac{1}{2}mv \cdot v$, donde m = masa del objeto, v = la velocidad del objeto, por lo que la energía cinética de la nave es

$$T = \frac{1}{2}m \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right] = \frac{1}{2}mv^2, \quad (5.4)$$

en coordenadas rectangulares.

Veamos cómo está definida la energía cinética en coordenadas polares, considerando a la nave como el objeto en cuestión. Sean $x(t) = r(t)\cos(\phi(t))$, $y(t) = r(t)\sin(\phi(t))$ y $r(t) = [(x(t))^2 + (y(t))^2]^{\frac{1}{2}}$.

Notemos que:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 &= \left[\frac{dr}{dt} \cos(\phi(t)) - r(t) \sin(\phi(t)) \frac{d\phi}{dt} \right]^2 \\ &= \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \cos^2(\phi(t)) - 2 \frac{dr}{dt} r(t) \cos(\phi(t)) \sin(\phi(t)) \frac{d\phi}{dt} \\ &\quad + r^2(t) \sin^2(\phi(t)) \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \\ \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 &= \left[\frac{dr}{dt} \sin(\phi(t)) + r(t) \cos(\phi(t)) \frac{d\phi}{dt} \right]^2 \\ &= \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \sin^2(\phi(t)) + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\phi}{dt} r(t) \sin(\phi(t)) \cos(\phi(t)) \\ &\quad + r^2(t) \cos^2(\phi(t)) \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right] &= \left[\frac{dr}{dt} \right]^2 (\cos^2(\phi(t)) + \operatorname{sen}^2(\phi(t))) \\ &+ (r^2(t))(\cos^2(\phi(t)) + \operatorname{sen}^2(\phi(t))) \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \\ &= \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + (r(t))^2 \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2. \end{aligned}$$

Con lo que la energía cinética de la nave está dada por

$$T = \frac{1}{2}m \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + (r(t))^2 \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right]. \quad (5.5)$$

en coordenadas polares.

Por lo tanto la **energía cinética de la nave** es:

$$E_{cm} = T = \frac{1}{2}m \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right] = \frac{1}{2}m \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + (r(t))^2 \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right]. \quad (5.6)$$

Por definición sabemos que la energía potencial gravitacional de una masa m es:

$$E_{pg} = -G \frac{M \cdot m}{r},$$

donde G es la constante gravitacional, M es la masa del cuerpo atractivo y r es la distancia entre sus centros.

Así, la energía potencial gravitacional de la nave a la Tierra esta dada por:

$$E_{pg1} = -G \frac{M_T m}{r(t)}, \quad (5.7)$$

donde m es la masa de la nave, M_T la masa de la Tierra y $r(t)$ la distancia entre la nave y la Tierra.

Por otro lado la energía potencial gravitacional de la nave a la Luna está dada por:

$$E_{pg2} = -G \frac{M_L m}{r_L(t, r, \phi)}, \quad (5.8)$$

donde m es la masa de la nave, M_L es la masa de la Luna y $r_L(r, \phi, t)$ la distancia entre la nave y la Luna. Entonces de (5.7) y (5.8) tenemos que la energía potencial gravitacional total de la nave que denotaremos por V esta dada por:

$$V = -G \frac{M_T m}{r(t)} - G \frac{M_L m}{r_L(t, r, \phi)}. \quad (5.9)$$

A partir de las ecuaciones encontradas anteriormente (5.6) y (5.9) podemos construir el lagrangiano, que por definición está dado por:

$$L = E_c - E_p = T - V,$$

Por lo que el lagrangiano es:

$$\begin{aligned} L = T - V &= \frac{1}{2} m \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + (r(t))^2 \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right] - \left(-G \frac{M_T m}{r(t)} - G \frac{M_L m}{r_L(t, r, \phi)} \right) \\ &= \frac{1}{2} m \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + (r(t))^2 \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right] + G \frac{M_T m}{r(t)} + G \frac{M_L m}{r_L(t, r, \phi)} \\ &= \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m r^2(t) \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 + G \frac{M_T m}{r(t)} + G \frac{M_L m}{r_L(t, r, \phi)}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

L es una función que depende de los parámetros t, r, ϕ entonces $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Para obtener el hamiltoniano vamos a calcular los momentos conjugados utilizando el lagrangiano encontrado; por definición los momentos conjugados son:

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dr}{dt} \right)} = 2 \left(\frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt} \right) \right) = m \left(\frac{dr}{dt} \right), \quad (5.11)$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{d\phi}{dt} \right)} = 2 \left(\frac{1}{2} m r^2(t) \left(\frac{d\phi}{dt} \right) \right) = m r^2(t) \left(\frac{d\phi}{dt} \right). \quad (5.12)$$

Así, el hamiltoniano por definición queda como:

$$\begin{aligned}
H &= p_r \left(\frac{dr}{dt} \right) + p_\phi \left(\frac{d\phi}{dt} \right) - L \\
&= m \left(\frac{dr}{dt} \right) \left(\frac{dr}{dt} \right) + mr^2(t) \left(\frac{d\phi}{dt} \right) \left(\frac{d\phi}{dt} \right) \\
&\quad - \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} mr^2(t) \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 + G \frac{M_T m}{r(t)} + G \frac{M_L m}{r_L(t, r, \phi)} \right] \\
&= m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + mr^2(t) \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 - \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - \frac{1}{2} mr^2(t) \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \\
&\quad - G \frac{M_T m}{r(t)} - G \frac{M_L m}{r_L(t, r, \phi)} \\
&= \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} mr^2(t) \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 - G \frac{M_T m}{r(t)} - G \frac{M_L m}{r_L(t, r, \phi)} \\
&= \frac{m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2}{2} + \frac{mr^2(t) \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2}{2} - G \frac{M_T m}{r(t)} - G \frac{M_L m}{r_L(t, r, \phi)} \\
&= \frac{m^2 \left(\frac{dr}{dt} \right)^2}{2m} + \frac{m^2 r^4(t) \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2}{2mr^2(t)} - G \frac{M_T m}{r(t)} - G \frac{M_L m}{r_L(t, r, \phi)} \\
&= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2(t)} - G \frac{M_T m}{r(t)} - G \frac{M_L m}{r_L(t, r, \phi)},
\end{aligned}$$

con $p_r^2 = m^2 \left(\frac{dr}{dt} \right)^2$ y $p_\phi^2 = m^2 r^4(t) \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2$.

Usualmente el hamiltoniano es una función de las variables de posición y sus momentos conjugados, de acuerdo a la sección 2.1.5 del capítulo 2 tenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{dr}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_r} \\
\frac{d\phi}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_\phi} \\
\frac{dp_r}{dt} &= - \frac{\partial H}{\partial r} \\
\frac{dp_\phi}{dt} &= - \frac{\partial H}{\partial \phi}
\end{aligned}$$

Calculamos las ecuaciones del movimiento de la nave:

$$\begin{aligned}
\frac{dr}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{2p_r}{2m} = \frac{p_r}{m}, \\
\frac{d\phi}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{2p_\phi}{2mr^2(t)} = \frac{p_\phi}{mr^2(t)}, \\
\frac{dp_r}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial r} \\
&= \frac{p_\phi^2}{mr^3(t)} - G\frac{mM_T}{r(t)^2} - G\frac{mM_L}{r_L^2(t, r, \phi)} \left(\frac{2r(t) - 2r_1\cos(\phi - \omega t)}{2[r^2(t) + r_1^2 - 2r(t)r_1\cos(\phi - \omega t)]^{\frac{1}{2}}} \right) \\
&= \frac{p_\phi^2}{mr^3(t)} - G\frac{mM_T}{r(t)^2} - G\frac{mM_L}{r_L^2(t, r, \phi)} \left(\frac{2[r(t) - r_1\cos(\phi - \omega t)]}{2[r^2(t) + d_{TL}^2 - 2r(t)d_{TL}\cos(\phi - \omega t)]^{\frac{1}{2}}} \right) \\
&= \frac{p_\phi^2}{mr^3(t)} - G\frac{mM_T}{r(t)^2} - G\frac{mM_L}{r_L^3(t, r, \phi)} \left(\frac{r(t) - r_1\cos(\phi - \omega t)}{r_L(r, \phi, t)} \right) \\
&= \frac{p_\phi^2}{mr^3(t)} - G\frac{mM_T}{r^2(t)} - G\frac{mM_L}{r_L^2(t, r, \phi)} (r(t) - r_1\cos(\phi - \omega t)), \\
\frac{dp_\phi}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \phi} \\
&= -G\frac{mM_L}{r_L^2(t, r, \phi)} \cdot \left(\frac{2r(t)r_1\sin(\phi - \omega t)}{2(r^2(t) + r_1^2 - 2r(t)r_1\cos(\phi - \omega t))^{\frac{1}{2}}} \right) \\
&= -G\frac{mM_L}{r_L^2(t, r, \phi)} \left(\frac{r(t)r_1\sin(\phi - \omega t)}{r_L(r, \phi, t)} \right) \\
&= -G\frac{mM_L}{r_L^3(t, r, \phi)} (r(t)r_1\sin(\phi - \omega t)).
\end{aligned}$$

Finalmente, las **ecuaciones de la nave** son:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}, \quad (5.13)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2(t)}, \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned}
\frac{dp_r}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial r} \\
&= \frac{p_\phi^2}{mr^3(t)} - G\frac{mM_T}{r^2(t)} - G\frac{mM_L}{r_L^3(t, r, \phi)} [r(t) - r_1\cos(\phi - \omega t)], \quad (5.15)
\end{aligned}$$

$$\frac{dp_\phi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = -G\frac{mM_L}{r_L^3(t, r, \phi)} r(t)r_1\sin(\phi - \omega t). \quad (5.16)$$

Hemos de resolver numéricamente el anterior conjunto de cuatro ecuaciones diferenciales no lineales. Para ello, utilizaremos más adelante el algoritmo de *Runge-Kutta* de cuarto orden.

Como la computadora introduce un margen de error debido al redondeo que efectúa en cada iteración el algoritmo de *Runge-Kutta* de cuarto orden, dicho error se hace más grande cuando se trabaja con variables con valores muy dispares entre sí.

Para minimizar este efecto hacemos que las variables r, ϕ, p_r y p_ϕ sean del mismo orden de magnitud. Una forma de conseguirlo es reescalarlas², lo cual se puede hacer de varias formas. En particular, usaremos:

$$\begin{aligned}\tilde{r} &= r/r_1, \\ \phi &, \\ \tilde{p}_r &= p_r/mr_1, \\ \tilde{p}_\phi &= p_\phi/mr_1^2.\end{aligned}\tag{5.17}$$

Con lo anterior, calculemos las ecuaciones de movimiento.

Notemos que r_1 es una constante fija.

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{r}}{dt} &= \frac{d(\frac{r}{r_1})}{dt} = \frac{dr}{r_1 dt} = \frac{m \frac{dr}{dt}}{mr_1} = \frac{p_r}{mr_1} = \tilde{p}_r, \\ \frac{d\phi}{dt} &= \frac{(\frac{d\phi}{dt})r_1^2}{r_1^2} = \frac{r^2(t)(\frac{d\phi}{dt})r_1^2}{r^2(t)r_1^2} = \frac{r^2(t)(\frac{d\phi}{dt})}{r_1^2} = \frac{\tilde{p}_\phi}{\tilde{r}^2}\end{aligned}$$

²Transformar linealmente los valores de la función a una escala de evaluación específica.

$$\begin{aligned}
& \frac{d\tilde{p}_r}{dt} = \frac{dp_r}{mr_1} = \left(\frac{1}{mr_1}\right) \left(\frac{dp_r}{dt}\right) = \left(\frac{1}{mr_1}\right) \left(\frac{p_\phi^2}{mr^3(t)} - G \frac{mM_T}{r^2(t)} - G \frac{mM_L}{r_L^3(t, r, \phi)} [r(t) - r_1 \cos(\phi - wt)]\right) \\
& = \frac{p_\phi^2}{m^2 r^3(t) r_1} - G \frac{mM_T}{mr_1 r_L^3(t, r, \phi)} [r(t) - r_1 \cos(\phi - wt)] = \frac{p_\phi^2 r_1^3}{m^2 r^3(t) r_1^4} - G \frac{M_T}{r^2(t) r_1} [r(t) - r_1 \cos(\phi - wt)] \\
& = \left(\frac{p_\phi^2}{(m^2 r_1^4)}\right) \left(\frac{r_1}{r(t)}\right)^3 - \frac{GM_T}{r_1^3} \left[\frac{r_1^2}{r^2(t)} + \frac{M_L r_1^2}{M_T r_L^3(t, r, \phi)} [r(t) - r_1 \cos(\phi - wt)]\right] \\
& = \left(\frac{p_\phi^2}{(m^2 r_1^4)}\right) \left(\frac{r_1}{r(t)}\right)^3 - \frac{GM_T}{r_1^3} \left[\frac{1}{r^2(t)} + \left(\frac{M_L}{M_T}\right) \left(\frac{r_1^2}{r_L^3(t, r, \phi)}\right) [r(t) - r_1 \cos(\phi - wt)]\right] \\
& = \left(\frac{p_\phi^2}{(m^2 r_1^4)}\right) \left(\frac{r_1}{r(t)}\right)^3 - \frac{GM_T}{r_1^3} \left[\frac{1}{\left(\frac{r(t)}{r_1}\right)^2} + \left(\frac{M_L}{M_T}\right) \left(\frac{r_1^2}{[r(t)^2 + r_1^2 - 2r(t)r_1 \cos(\phi - wt)]^{\frac{3}{2}}}\right) [r(t) - r_1 \cos(\phi - wt)]\right] \\
& = \left(\frac{p_\phi^2}{(m^2 r_1^4)}\right) \left(\frac{r_1}{r(t)}\right)^3 - \frac{GM_T}{r_1^3} \left[\frac{1}{\left(\frac{r(t)}{r_1}\right)^2} + \left(\frac{M_L}{M_T}\right) \left(\frac{r_1^2}{(r_1^2)^{\frac{3}{2}} \left[\frac{r(t)}{r_1}\right]^2 + 1 - \frac{2r(t)}{r_1} \cos(\phi - wt)\right)^{\frac{3}{2}}}\right) [r(t) - r_1 \cos(\phi - wt)]\right] \\
& = \left(\frac{p_\phi^2}{(m^2 r_1^4)}\right) \left(\frac{r_1}{r(t)}\right)^3 - \frac{GM_T}{r_1^3} \left[\frac{1}{\left(\frac{r(t)}{r_1}\right)^2} + \left(\frac{M_L}{M_T}\right) \left(\frac{r_1^2}{(r_1^3) \left[\left(\frac{r(t)}{r_1}\right)^2 + 1 - \frac{2r(t)}{r_1} \cos(\phi - wt)\right]^{\frac{3}{2}}}\right) [r(t) - r_1 \cos(\phi - wt)]\right] \\
& = \left(\frac{p_\phi^2}{(m^2 r_1^4)}\right) \left(\frac{r_1}{r(t)}\right)^3 - \frac{GM_T}{r_1^3} \left[\frac{1}{\left(\frac{r(t)}{r_1}\right)^2} + \left(\frac{M_L}{M_T}\right) \left(\frac{1}{(r_1) \left[\left(\frac{r(t)}{r_1}\right)^2 + 1 - \frac{2r(t)}{r_1} \cos(\phi - wt)\right]^{\frac{3}{2}}}\right) [r(t) - r_1 \cos(\phi - wt)]\right] \\
& = \left(\frac{p_\phi^2}{(m^2 r_1^4)}\right) \left(\frac{1}{\left(\frac{r(t)}{r_1}\right)^3}\right) - \frac{GM_T}{r_1^3} \left[\frac{1}{\left(\frac{r(t)}{r_1}\right)^2} + \left(\frac{M_L}{M_T}\right) \left(\frac{1}{\left[\left(\frac{r(t)}{r_1}\right)^2 + 1 - \frac{2r(t)}{r_1} \cos(\phi - wt)\right]^{\frac{3}{2}}}\right) \left(\frac{r(t)}{r_1} - \frac{r_1}{r_1} \cos(\phi - wt)\right)\right] \\
& = \left(\tilde{p}_\phi^2\right) \left(\frac{1}{\tilde{r}^3}\right) - \Delta \left[\frac{1}{(\tilde{r})^2} + \mu \left(\frac{1}{[1 + \tilde{r}^2 - 2\tilde{r} \cos(\phi - wt)]^{\frac{3}{2}}}\right) [\tilde{r} - \cos(\phi - wt)]\right] = \left(\tilde{p}_\phi^2\right) \left(\frac{1}{\tilde{r}^3}\right) - \Delta \left[\frac{1}{(\tilde{r})^2} - \mu \left(\frac{1}{(\tilde{r})^3}\right) [\tilde{r} - \cos(\phi - wt)]\right] \\
& = \left(\tilde{p}_\phi^2\right) - \Delta \left[\frac{1}{(\tilde{r})^2} + \frac{\mu}{(\tilde{r})^3} [\tilde{r} - \cos(\phi - wt)]\right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d\tilde{p}_\phi}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{p_\phi}{mr_1^2} \right) = \left(\frac{1}{mr_1^2} \right) \frac{dp_\phi}{dt} = \left(\frac{1}{mr_1^2} \right) \left(-G \frac{mM_L}{r_L^3(t, r, \phi)} (r(t)r_1 \text{sen}(\phi - wt)) \right) \\
& = - \left(\frac{G}{r_1^3} \right) \left(\frac{M_L}{r_L^3(t, r, \phi)} (r(t)r_1^2 \text{sen}(\phi - wt)) \right) = - \left(\frac{GM_T}{r_1^3} \right) \left(\frac{M_L}{M_T} \right) \left(\frac{r(t)r_1^2}{r_L^3(t, r, \phi)} \text{sen}(\phi - wt) \right) \\
& = - \left(\frac{GM_T}{r_1^3} \right) \left(\frac{M_L}{M_T} \right) \left(\frac{r(t)}{r_1} \right) \left(\frac{r_1^3}{r_L^3(t, r, \phi)} \right) (\text{sen}(\phi - wt)) = -\Delta\mu\tilde{r} \left(\frac{r_1^3}{r_L^3(t, r, \phi)} \right) (\text{sen}(\phi - wt)) \\
& = -\Delta\mu\tilde{r} \left(\frac{r_1^3}{[r(t)^2 + r_1^2 - 2r(t)r_1 \cos(\phi - wt)]^{\frac{3}{2}}} \right) (\text{sen}(\phi - wt)) \\
& = -\Delta\mu\tilde{r} \left(\frac{r_1^3}{(r_1^2)^{\frac{3}{2}} \left[\frac{r(t)^2}{r_1^2} + 1 - \frac{2r(t)}{r_1} \cos(\phi - wt) \right]^{\frac{3}{2}}} \right) (\text{sen}(\phi - wt)) \\
& = -\Delta\mu\tilde{r} \left(\frac{r_1^3}{(r_1)^3 \left[\left(\frac{r(t)}{r_1} \right)^2 + 1 - \frac{2r(t)}{r_1} \cos(\phi - wt) \right]^{\frac{3}{2}}} \right) (\text{sen}(\phi - wt)) \\
& = -\Delta\mu\tilde{r} \left(\frac{1}{\left[\left(\frac{r(t)}{r_1} \right)^2 + 1 - \frac{2r(t)}{r_1} \cos(\phi - wt) \right]^{\frac{3}{2}}} \right) (\text{sen}(\phi - wt)) \\
& = -\Delta\mu\tilde{r} \left(\frac{1}{[1 + (\tilde{r})^2 - 2\tilde{r} \cos(\phi - wt)]^{\frac{3}{2}}} \right) (\text{sen}(\phi - wt)) \\
& = -\Delta\mu\tilde{r} \left(\frac{1}{(\tilde{r})^3} \right) (\text{sen}(\phi - wt)) \\
& = -\frac{\Delta\mu\tilde{r}}{\tilde{r}^3} \text{sin}(\phi - wt).
\end{aligned}$$

Por lo que, en este caso, las ecuaciones de movimiento son:

$$\frac{d\tilde{r}}{dt} = \tilde{p}_r, \quad (5.18)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\tilde{p}_\phi}{\tilde{r}^2}, \quad (5.19)$$

$$\frac{d\tilde{p}_r}{dt} = \left(\frac{\tilde{p}_\phi^2}{\tilde{r}^3} \right) - \Delta \left[\frac{1}{(\tilde{r})^2} + \frac{\mu}{(\tilde{r}l)^3} [\tilde{r} - \cos(\phi - \omega t)] \right], \quad (5.20)$$

$$\frac{d\tilde{p}_\phi}{dt} = -\frac{\Delta\mu\tilde{r}}{\tilde{r}l^3} \sin(\phi - \omega t), \quad (5.21)$$

donde,

$$\begin{aligned} \Delta &\equiv GM_T/r_1^3, \\ \mu &\equiv M_L/M_T, \\ \tilde{r}' &\equiv [1 + \tilde{r}^2 - 2\tilde{r}\cos(\phi - \omega t)]^{1/2}. \end{aligned}$$

Los valores numéricos que usaremos son los que se mostraron en el capítulo 2:

$$\begin{aligned} G &= 6.67 \times 10^{-11} Nm^2kg^{-2}, N = \frac{mkg}{s^2} \\ M_T &= 5.9736 \times 10^{24}kg, \\ M_L &= 0.07349 \times 10^{24}kg, \\ r_1 &= 3.844 \times 10^8m, \\ \omega &= 2.6617 \times 10^{-6}s^{-1}. \end{aligned}$$

Estos valores numéricos aproximados están ya establecidos de manera general. Además, como la nave despega desde la superficie terrestre y llega a la luna, son necesarios los radios de la Tierra, $R_T = 6.378160 \times 10^6m$, y de la Luna, $R_L = 1.7374 \times 10^6m$.

Resolver las 4 ecuaciones de movimiento requiere proporcionar los valores iniciales de r , ϕ , p_r , y p_ϕ . Los dos primeros r , ϕ determinan el punto de lanzamiento del cohete, pues r es la distancia del cohete a la tierra y ϕ es el ángulo de inclinación que tiene el cohete en el momento inicial del lanzamiento.

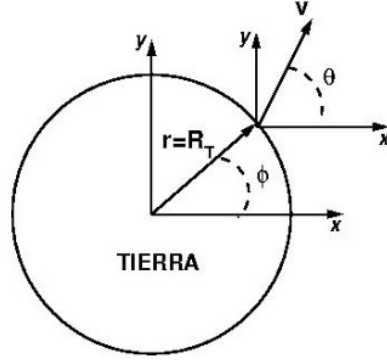


Figura 5.5: Nave-Tierra

En cuanto a los valores iniciales de los momentos p_r y p_ϕ , pueden obtenerse a partir de la velocidad y ángulo de lanzamiento $\mathbf{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = (v\cos(\theta), v\sin(\theta))$ recurriendo a las definiciones.

Así, se tienen las relaciones siguientes:

$$\begin{aligned}
 \tilde{p}_r &= \frac{p_r}{mr_1} = \frac{m \frac{dr}{dt}}{mr_1} = \left(\frac{m}{mr_1}\right) \left(\frac{dr}{dt}\right) = \left(\frac{1}{r_1}\right) \left(\frac{d}{dt} \sqrt{x^2 + y^2}\right) \\
 &= \left(\frac{1}{r_1}\right) \left(\frac{2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt}}{2(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}\right) = \left(\frac{1}{r_1}\right) \left(\frac{x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt}}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}\right) \\
 &= \frac{x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt}}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} r_1} = \frac{x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt}}{r r_1} = \frac{xv\cos(\theta) + yv\sin(\theta)}{r r_1} \\
 &= \frac{rv\cos(\theta)\cos(\phi) + rv\sin(\theta)\sin(\phi)}{r r_1} = \frac{v\cos(\theta)\cos(\phi) + v\sin(\theta)\sin(\phi)}{r_1} \\
 &= \frac{v}{r_1} (\cos(\theta)\cos(\phi) + \sin(\theta)\sin(\phi)) = \frac{v}{r_1} (\cos(\theta - \phi)) = \tilde{v}\cos(\theta - \phi),
 \end{aligned}$$

donde $\tilde{v} = \frac{v}{r_1}$ con la constante $v = 11.2\text{km/s} = 40.320\text{km/h}$.

Por otro lado, notemos que $\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$.

$$\begin{aligned}
\tilde{p}_\phi &= \frac{p_\phi}{mr_1^2} = \frac{mr^2 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)}{mr_1^2} = \left(\frac{r^2}{r_1^2}\right) \left(\frac{d\phi}{dt}\right) = \left(\frac{r^2}{r_1^2}\right) \left(\frac{d(\arctan\left(\frac{y}{x}\right))}{dt}\right) \\
&= \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 \left(\frac{\frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{dt}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}\right) = (\tilde{r})^2 \left(\frac{\frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{dt}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}\right) = \left(\frac{\tilde{r}^2}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}\right) \left(\frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{dt}\right) \\
&= \left(\frac{\tilde{r}^2}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}\right) \left(\frac{x \frac{dx}{dt} - y \frac{dy}{dt}}{x^2}\right) = \left(\frac{\tilde{r}^2}{1 + \left(\frac{y^2}{x^2}\right)}\right) \left(\frac{x \frac{dx}{dt} - y \frac{dy}{dt}}{x^2}\right) \\
&= \left(\frac{\tilde{r}^2}{x^2 + \left(\frac{y^2 \cdot x^2}{x^2}\right)}\right) \left(x \frac{dx}{dt} - y \frac{dy}{dt}\right) = \left(\frac{\tilde{r}^2}{x^2 + y^2}\right) \left(x \frac{dx}{dt} - y \frac{dy}{dt}\right) \\
&= \left(\frac{\tilde{r}^2}{r^2}\right) (xv \operatorname{sen}(\theta) - yv \operatorname{cos}(\theta)) \\
&= \left(\frac{\tilde{r}^2}{r^2}\right) (r \operatorname{cos}(\phi) v \operatorname{sen}(\theta) - r \operatorname{sen}(\phi) v \operatorname{cos}(\theta)) \\
&= \left(\frac{\tilde{r}^2}{r^2}\right) (rv (\operatorname{cos}(\phi) \operatorname{sen}(\theta) - \operatorname{sen}(\phi) \operatorname{cos}(\theta))) \\
&= \left(\frac{\tilde{r}^2}{r}\right) (v (\operatorname{sen}(\theta - \phi))) \\
&= \left(\frac{\tilde{r}^2 r_1 v}{rr_1}\right) (\operatorname{sen}(\theta - \phi)) \\
&= (\tilde{r}^2) \left(\frac{r_1}{r}\right) \left(\frac{v}{r_1}\right) (\operatorname{sen}(\theta - \phi)) \\
&= (\tilde{r}^2) \left(\frac{1}{\frac{r}{r_1}}\right) \left(\frac{v}{r_1}\right) (\operatorname{sen}(\theta - \phi)) \\
&= (\tilde{r}^2) \left(\frac{1}{\tilde{r}}\right) \left(\frac{v}{r_1}\right) (\operatorname{sen}(\theta - \phi)) \\
&= \tilde{r} \left(\frac{v}{r_1}\right) (\operatorname{sen}(\theta - \phi)) \\
&= \tilde{r} \tilde{v} \operatorname{sen}(\theta - \phi).
\end{aligned}$$

Finalmente tenemos:

$$\begin{aligned}
\tilde{p}_r &= \tilde{v} \operatorname{cos}(\theta - \phi), \\
\tilde{p}_\phi &= \tilde{r} \tilde{v} \operatorname{sen}(\theta - \phi).
\end{aligned}$$

Salvo que el punto de lanzamiento está sobre la superficie de la Tierra, $r = R_T$, no existe un método general para asignar valores iniciales al resto de variables, ϕ , θ y v . Es aconsejable, no obstante, que v sea próxima a la velocidad de escape, puesto que éste es el mínimo valor que garantiza que la nave tiene la energía suficiente para escapar del campo gravitatorio de la Tierra. Finalmente, hay mucha libertad para escoger ϕ y θ , que dependen de dónde esté situada la Luna en el momento del lanzamiento.

Capítulo 6

Solución del Modelo(Problema)

En el capítulo anterior definimos nuestro modelo como el lanzamiento de una nave espacial a la luna teniendo como punto de partida la tierra, así, nuestro modelo se compone de tres cuerpos tierra, luna y nave espacial que consideramos sin estructura interna y caracterizados de forma única por sus masas, M_T , M_L y m , respectivamente. Siendo así el problema principal diseñar y escribir el programa que resuelve las ecuaciones del movimiento de una nave, moviéndose bajo la acción de los campos gravitatorios terrestre y lunar a través de métodos numéricos.

En este capítulo damos solución atacando este problema con el método numérico de Runge-Kutta que es capaz de resolver un sistema de ecuaciones diferenciales. Compararemos los resultados obtenidos en este método con resultados del método de Euler.

En el capítulo anterior establecimos las ecuaciones de movimiento de la nave como:

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{r}}{dt} &= \tilde{p}_r = \frac{p_r}{mr_1}, \\ \frac{d\phi}{dt} &= \frac{\tilde{p}_\phi}{\tilde{r}^2} = \frac{p_\phi}{mr^2}, \\ \frac{d\tilde{p}_r}{dt} &= \left(\frac{\tilde{p}_\phi^2}{\tilde{r}^3} \right) - \Delta \left[\frac{1}{(\tilde{r})^2} + \frac{\mu}{(\tilde{r}l)^3} [\tilde{r} - \cos(\phi - \omega t)] \right], \\ \frac{d\tilde{p}_\phi}{dt} &= -\frac{\Delta\mu\tilde{r}}{\tilde{r}l^3} \sin(\phi - \omega t).\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\Delta &\equiv GM_T/r_1^3, \\ \mu &\equiv M_L/M_T, \\ \tilde{r}' &\equiv [1 + \tilde{r}^2 - 2\tilde{r}\cos(\phi - \omega t)]^{1/2}.\end{aligned}$$

En particular, usaremos:

$$\begin{aligned}\tilde{r} &= r/r_1, \\ \phi, \\ \tilde{p}_r &= p_r/mr_1, \\ \tilde{p}_\phi &= p_\phi/mr_1^2.\end{aligned}$$

Los valores numéricos que usaremos son los que se mostraron en el capítulo 2:

$$\begin{aligned}G &= 6.67 \times 10^{-11} Nm^2 kg^{-2}, N = \frac{mkg}{s^2} \\ M_T &= 5.9736 \times 10^{24} kg, \\ M_L &= 0.07349 \times 10^{24} kg, \\ r_1 &= 3.844 \times 10^8 m, \\ \omega &= 2.6617 \times 10^{-6} s^{-1}, \\ R_T &= 6.378160 \times 10^6 m, \\ R_L &= 1.7374 \times 10^6 m.\end{aligned}$$

Resolver las 4 ecuaciones de movimiento requiere proporcionar los valores iniciales de r , ϕ , p_r , y p_ϕ . Los dos primeros r , ϕ determinan el punto de lanzamiento del cohete, pues r es la distancia del cohete a la tierra y ϕ es el ángulo de inclinación que tiene el cohete en el momento inicial del lanzamiento.

En cuanto a los valores iniciales de los momentos p_r y p_ϕ , pueden obtenerse a partir de la velocidad y ángulo de lanzamiento teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned}\tilde{p}_r &= \tilde{v}\cos(\theta - \phi), \\ \tilde{p}_\phi &= \tilde{r}\tilde{v}\sin(\theta - \phi).\end{aligned}$$

Las ecuaciones de movimiento de la nave con los valores numericos sustituidos quedan como:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\tilde{r}}{dt} &= \frac{p_r}{m(3.844 \times 10^8)}, \\
 \frac{d\phi}{dt} &= \frac{p_\phi}{mr^2}, \\
 \frac{d\tilde{p}_r}{dt} &= \left(\frac{p_\phi^2}{m^2 r^3 (3.844 \times 10^8)} \right) - \left(\frac{(6.67 \times 10^{-11})(5.9736 \times 10^{24})}{3.844 \times 10^8} \right) \\
 &\quad \left[\frac{1}{\left(\frac{r^2}{(3.844 \times 10^8)} \right)} + \frac{\left(\frac{0.07349 \times 10^{24}}{5.9736 \times 10^{24}} \right)}{\left(1 + \left(\frac{r}{3.844 \times 10^8} \right)^2 - 2 \left(\frac{r}{3.844 \times 10^8} \right) \cos(\phi - (2.6617 \times 10^{-6})t) \right)^{\frac{3}{2}}} \right] \left[\left(\frac{r}{3.844 \times 10^8} \right) - \cos(\phi - (2.6617 \times 10^{-6})t) \right], \\
 \frac{d\tilde{p}_\phi}{dt} &= - \left[\left(\frac{\left(\frac{(6.67 \times 10^{-11})(0.07349 \times 10^{24})}{(3.844 \times 10^8)^4} \right) (r)}{\left(1 + \left(\frac{r}{3.844 \times 10^8} \right)^2 - 2 \left(\frac{r}{3.844 \times 10^8} \right) \cos(\phi - (2.6617 \times 10^{-6})t) \right)^{\frac{3}{2}}} \right) \sin(\phi - (2.6617 \times 10^{-6})t) \right].
 \end{aligned}$$

Notemos que las anteriores ecuaciones están dadas en forma polar por lo que daremos su gráfica solución en coordenadas polares.

Vamos a comparar los resultados obtenidos entre el método numérico de Runge-Kutta y el método de Euler, por lo que anexamos la función y programa realizado para cada uno de estos métodos:

- Función de Euler.

```

1  % Función para Euler aplicado a cuatro ecuaciones
    diferenciales
2
3  function [t,x,y,z,w] =funpoleuler4(f,g,e,v,t0,tf,x0,
    y0,z0,w0,n)%Nombre de la función
4      h=(tf-t0)/n;% tamaño de paso
5      t=t0:h:tf;% vector que inicia en t0 aumenta en
        h y llega a tf
6      x=zeros(1,n); % almacena en una matriz de n+1
        filas
7      %y 1 columna las iteraciones
8      y=zeros(1,n);% almacena en una matriz de n+1
        filas
9      %y 1 columna las iteraciones
10     z=zeros(1,n);% almacena en una matriz de n+1
        filas
11     %y 1 columna las iteraciones
12     w=zeros(1,n);% almacena en una matriz de n+1
        filas
13     %y 1 columna las iteraciones
14     x(1)=x0;% Condición inicial
15     y(1)=y0;% Condición inicial
16     z(1)=z0;% Condición inicial
17     w(1)=w0;% Condición inicial
18     fprintf('Tamaño de paso: ');
19     disp(h)
20     % X=zeros(n+1,5);
21
22     for i=1:n% Calculo por metodo de Euler

```

```

23         x(i+1)=x(i)+f(t(i),x(i),y(i),z(i),w(i))*h;
24         y(i+1)=y(i)+g(t(i),x(i),y(i),z(i),w(i))*h;
25         z(i+1)=z(i)+e(t(i),x(i),y(i),z(i),w(i))*h;
26         w(i+1)=w(i)+v(t(i),x(i),y(i),z(i),w(i))*h;
27
28         %X(i,:)= [t(i) x(i) y(i) z(i) w(i)];
29     end
30
31     disp(t)
32     disp(x)
33     disp(y)
34     disp(z)
35     disp(w)
36
37     polar(t,x)
38     hold on
39     polar(t,y)
40     hold on
41     polar(t,z)
42     hold on
43     polar(t,w)
44
45
46     end

```

•• Programa de Euler aplicado a cuatro ecuaciones diferenciales lineales.

```

1  %Euler aplicado a cuatro ecuaciones diferenciales.
2
3  clc;% Limpia pantalla.
4  clear;% Variables.
5  clear all;% Elimina los datos que existan en el
   fichero.
6  t0=input('Ingresar el tiempo inicial: ');% input se
   utiliza para asignar
7  % el valor de una variable.
8  tf=input('Ingresar el tiempo final: ');
9  n=input('Ingresar el número de intervalos: ');
10 x0=input('Ingresar el valor de x en el tiempo

```

```

    inicial: ');
11 y0=input('Ingresar el valor de y en el tiempo
    inicial: ');
12 z0=input('Ingresar el valor de z en el tiempo
    inicial: ');
13 w0=input('Ingresar el valor de w en el tiempo
    inicial: ');
14
15
16 f=input('Ingrese la función (entre apostrofes) f = '
    ');
17 g=input('Ingrese la función (entre apostrofes) g = '
    ');
18 e=input('Ingrese la función (entre apostrofes) e = '
    ');
19 v=input('Ingrese la función (entre apostrofes) v = '
    ');
20 f=str2func(strcat('@(t,x,y,z,w) ',f)); %@(t,x,y,z,w)
    se utiliza para pegar a la
21 %función introducida y así Matlab la reconozca como
    una función.
22 g=str2func(strcat('@(t,x,y,z,w) ',g));
23 e=str2func(strcat('@(t,x,y,z,w) ',e));
24 v=str2func(strcat('@(t,x,y,z,w) ',v));
25
26 [t,x,y,z,w]=funpoleuler4(f,g,e,v,t0,tf,x0,y0,z0,w0,n
    ); % Introduce en la función
27 %realizada los valores adquiridos anteriormente.

```

- Función de Runge-Kutta.

```

1 % Función para Runge-Kutta de orden 4 aplicado a
    cuatro ecuaciones
2 % diferenciales.
3
4 function [t,x,y,z,w] =funpol4r_k_4(f,g,l,v,x0,y0,z0,
    w0,t0,tf,n)
5 %format long
6 h=(tf-t0)/n;% Tamaño de paso.

```



```

7 | t=t0:h:tf;% Vector que inicia en t0 aumenta en h y
   | llega a tf.
8 | x=zeros(1,n);% Almacena las iteraciones en una
   | matriz de n+1 filas
9 | %y 1 columna.
10 | y=zeros(1,n);% Almacena las iteraciones en una
   | matriz de n+1 filas
11 | %y 1 columna.
12 | z=zeros(1,n);% Almacena las iteraciones en una
   | matriz de n+1 filas
13 | %y 1 columna.
14 | w=zeros(1,n);% Almacena las iteraciones en una
   | matriz de n+1 filas
15 | %y 1 columna.
16 | x(1)=x0;% Condición inicial.
17 | y(1)=y0;% Condición inicial.
18 | z(1)=z0;% Condición inicial.
19 | w(1)=w0;% Condición inicial.
20 | fprintf('Tamaño de paso: ');
21 | disp(h)
22 | %X=zeros(n+1,5);
23 |
24 | for i=1:n% Calculo por metodo de rk4.
25 |     m1=f(t(i),x(i),y(i),z(i),w(i));
26 |     k1=g(t(i),x(i),y(i),z(i),w(i));
27 |     n1=l(t(i),x(i),y(i),z(i),w(i));
28 |     o1=v(t(i),x(i),y(i),z(i),w(i));
29 |
30 |     m2=f(t(i)+h/2,x(i)+(h*m1)/2,y(i)+(h*k1)/2,z(i)+(
   |         h*n1)/2,w(i)+(h*o1)/2);
31 |     k2=g(t(i)+h/2,x(i)+(h*m1)/2,y(i)+(h*k1)/2,z(i)+(
   |         h*n1)/2,w(i)+(h*o1)/2);
32 |     n2=l(t(i)+h/2,x(i)+(h*m1)/2,y(i)+(h*k1)/2,z(i)+(
   |         h*n1)/2,w(i)+(h*o1)/2);
33 |     o2=v(t(i)+h/2,x(i)+(h*m1)/2,y(i)+(h*k1)/2,z(i)+(
   |         h*n1)/2,w(i)+(h*o1)/2);
34 |
35 |     m3=f(t(i)+h/2,x(i)+(h*m2)/2,y(i)+(h*k2)/2,z(i)+(

```

```

36     h*n2)/2,w(i)+(h*o2)/2);
37     k3=g(t(i)+h/2,x(i)+(h*m2)/2,y(i)+(h*k2)/2,z(i)+(
38     h*n2)/2,w(i)+(h*o2)/2);
39     n3=l(t(i)+h/2,x(i)+(h*m2)/2,y(i)+(h*k2)/2,z(i)+(
40     h*n2)/2,w(i)+(h*o2)/2);
41     o3=v(t(i)+h/2,x(i)+(h*m2)/2,y(i)+(h*k2)/2,z(i)+(
42     h*n2)/2,w(i)+(h*o2)/2);
43     m4=f(t(i)+h,x(i)+h*m3,y(i)+h*k3,z(i)+h*n3,w(i)+h
44     *o3);
45     k4=g(t(i)+h,x(i)+h*m3,y(i)+h*k3,z(i)+h*n3,w(i)+h
46     *o3);
47     n4=l(t(i)+h,x(i)+h*m3,y(i)+h*k3,z(i)+h*n3,w(i)+h
48     *o3);
49     o4=v(t(i)+h,x(i)+h*m3,y(i)+h*k3,z(i)+h*n3,w(i)+h
50     *o3);
51     end
52
53
54     disp(t)
55     disp(x)
56     disp(y)
57     disp(z)
58     disp(w)
59
60
61
62     for j=1:length(t)
63
64     polar(0,390000000)
65     hold on

```

```

66 polar(t(1:j),x(1:j));
67 pause(0.1)
68 hold on %grafica mas curvas sobre la misma ventana
69 polar(t(1:j),y(1:j));
70 hold on
71 polar(t(1:j),z(1:j));
72 hold on
73 polar(t(1:j),w(1:j));
74 hold on
75
76
77 theta=0:2*pi/100:8*pi;
78 r=((3.844)*(10^8))*ones(size(theta));
79 hold on
80 pause(0.1)
81 polar(theta(1:j),r(1:j))
82
83 end
84
85
86 end

```

●● Programa de Runge-Kutta aplicado a cuatro ecuaciones diferenciales lineales.

```

1 % RK4 aplicado a cuatro ecuaciones diferenciales.
2
3 clc;% Limpia pantalla.
4 clear;% Variables.
5 clear all;% Elimina los datos que existan en el
   fichero.
6 t0=input('Ingresar el tiempo inicial: ');% input se
   utiliza para asignar
7 % el valor de una variable.
8 tf=input('Ingresar el tiempo final: ');
9 n=input('Ingresar el número de intervalos: ');
10 x0=input('Ingresar el valor de la función f en el
   tiempo inicial: ');
11 y0=input('Ingresar el valor de la función g en el

```

```

    tiempo inicial: ');
12 z0=input('Ingresar el valor de la función l en el
    tiempo inicial: ');
13 w0=input('Ingresar el valor de la función v en el
    tiempo inicial: ');
14
15 f=input('Ingrese la función (entre apostrofes) f = '
    ');
16 g=input('Ingrese la función (entre apostrofes) g = '
    ');
17 l=input('Ingrese la función (entre apostrofes) l = '
    ');
18 v=input('Ingrese la función (entre apostrofes) v = '
    ');
19 f=str2func(strcat('@(t,x,y,z,w) ',f));%@(t,x,y,z,w)
    se utiliza para pegar a la
20 %función introducida y así Matlab la reconozca como
    una función.
21 g=str2func(strcat('@(t,x,y,z,w) ',g));
22 l=str2func(strcat('@(t,x,y,z,w) ',l));
23 v=str2func(strcat('@(t,x,y,z,w) ',v));
24
25
26 [t,x,y,z,w]=funpol4r_k_4(f,g,l,v,x0,y0,z0,w0,t0,tf,n
    );%Introduce en la función
27 %realizada los valores adquiridos anteriormente.
28
29
30 %'z/(13684.64) '
31 %'w/((3.56)*(x.^2)) '
32 %'(w/((x.^3)*(48717.3184)))-((39843.912)/((3844).^3)
    )*((1/((x.^2)/(14776336)))+(0.012302464)/(1+((x
    .^2)/14776336)-((2*x)/3844)*(cos(y
    -(0.000000000026617)*t))).^(1/2)*((x/38844)-cos(y
    -(0.000000000026617)*t)))) '
33 %'-(((490.1783)/((3844).^4))/(1+((x.^2)/(3844).^2)
    -((2*x)/3844)*cos(y-(0.000000000026617)*t))
    .^(3/2))*(sin(y-(0.000000000026617)*t)) '

```

```

34
35
36 %'(40.320/38.44)*sin((pi/3)-w)'
37 %'((1/38.44)*(40.320/38.44)*sin((pi/3)-w))-((z
    /38.44)*(40.320/38.44)*cos((pi/3)-w))'
38
39
40
41 %'z/1.368464'
42 %'w/((x.^2)*(0.0356))'
43 %'(w/((x.^3)*(3.4596)))-(3.9843912/56800.23558)
    *((1/((x.^2)/1477.6336))+(0.012302464/(1+((x.^2)
    /1477.6336)-(2*x/38.44)*(cos(y
    -(0.000000000000026617)*t))).^(1/2)))*((x/38.44)-
    cos(y-(0.000000000000026617)*t)))'
44 %'-(((0.04901783/(38.44).^4)/(1+((z.^2)/1477.6336)
    -((2*z)/38.44)*cos(w-(0.000000000000026617)*t))
    .^(3/2))*(sin(w-(0.000000000000026617)*t)))'
45
46 %((w^2)/(x^3))-((6.7981)*(10^-12))*((1/(x^2))
    +(((1.2302)*(10^18))/(1+(x^2)-2*x*cos(-(2.6617)
    *(10^-6)*t)).^(3/2))*(x-cos(-(2.6617)*(10^-6)*t)))'
47
48
49
50 %'z'
51 %'w/(x^2)'
52 %'((w^2)/(x^3))-((6.7981)*(10^-12))*((1/(x^2))
    +(((1.2302)*(10^18))/(1+(x^2)-2*x*cos(-(2.6617)
    *(10^-6)*t)).^(3/2))*(x-cos(-(2.6617)*(10^-6)*t)))
    '
53 %'(-((6.7981)*(10^-12))*((1.2302)*(10^18))*x)/((1+(
    x^2)-2*x*cos(-(2.6617)*(10^-6)*t)).^(3/2))*sin
    (-(2.6617)*(10^-6)*t)'
54
55
56 %'((w^2)/(x^3))-((6.7981)*(10^-12))*((1/(x^2))
    +(((1.2302)*(10^18))/(1+(x^2)-2*x*cos(-(2.6617)

```

```

    *(10^-6)*t))^(3/2))*(x-cos(-(2.6617)*(10^-6)*t))
    '
57 %' -((((6.7981)*(10^-12))*((1.2302)*(10^18))*x)
    /((1+(x^2)-2*x*cos(-(2.6617)*(10^-6)*t))^(3/2)))*
    sin(-(2.6617)*(10^-6)*t)) '
58
59
60
61
62 %' z '
63 %' w/(x^2) '
64 %' ((w^2)/(x^3)) - ((7.0147)*(10^-4))*((1/(x^2))
    + ((0.0123)/(1+(x^2)-2*x*cos(-(2.6617)*(10^-14)*t)
    )^(3/2))*(x-cos(-(2.6617)*(10^-14)*t))) '
65 %' -((((7.0147)*(10^-4))*(0.0123)*x)/((1+(x^2)-2*x*
    cos(-(2.6617)*(10^-14)*t))^(3/2)))*sin(-(2.6617)
    *(10^-14)*t)) '

```

Apéndice A

Programas en Matlab

En este apéndice daremos a conocer los programas y funciones en MATLAB de los métodos Euler y Runge-Kutta aplicados a un sistema de una, dos, tres y cuatro ecuaciones diferenciales que dan una aproximación a la solución.

A.0.1. Función y programa de Euler y Runge-Kutta aplicado a una ecuación diferencial lineal

- Función de Euler.

```
1 % Función del método de Euler aplicado a una
   ecuación diferencial.
2
3 function [t,x] =feuler1(f,t0,tf,x0,n)%Nombre de la
   función.
4     h=(tf-t0)/n;% Tamaño de paso.
5     t=t0:h:tf;% Vector que inicia en t0 aumenta en
       h y llega a tf.
6     x=zeros(n+1,1); % Almacena en una matriz de n
       +1 filas
7     %y 1 columna las iteraciones.
8     x(1)=x0; % Condición inicial.
9     fprintf('Tamaño de paso: ');
10    disp(h)
11    for i=1:n+1% Calculo por metodo de Euler.
```

```

12         x(i+1)=x(i)+f(t(i),x(i))*h;
13         X(i,:)=[t(i) x(i)];
14     end
15     W=array2table(X,'VariableNames',{'t' 'x'}); %
16         Crea y almacena una
17         %tabla con los valores obtenidos.
18     disp(W)
19     t=linspace(t0,tf,n);
20     m=questdlg('EMPEZAR ANIMACION','MENSAJE 1');
21     if strcmp(m,'Yes');
22
23
24         for j=1:length(t)%Crea la grafica con los
25             valores obtenidos.
26             %plot(t(1:j),t(1:j),'r','Linewidth',2);%Le
27             da color y grosor
28             %a la grafica.
29             plot(t(1:j),x(1:j),'b','Linewidth',3);
30             pause(0.000001)
31             hold on
32             axis([1,1.6,1,3]);%Determina los valores de
33             los ejes del plano.
34             grid on
35             title('Problema de valor inicial');%Titulo
36             de la grafica.
37             xlabel('Tiempo');
38             ylabel('Valores para x');
39         end
40         legend('x(t) solucion Euler'); % Pone la
41         etiqueta en la
42         %grafica de la solucion.
43         hold off
44     end

```

•• Programa de Euler aplicado a una ecuación diferencial lineal.

```

1 %Euler aplicado a una ecuación diferencial

```



```

2
3 clc;% Limpia pantalla.
4 clear;% Variables.
5 clear all; % Elimina los datos que existan en el
   fichero.
6 t0=input('Ingresar el tiempo inicial: ');% input se
   utiliza para asignar
7 % el valor de una variable.
8 tf=input('Ingresa el tiempo final: ');
9 n=input('Ingresa el número de intervalos: ');
10 x0=input('Ingresar el valor de x en el tiempo
   inicial: ');
11
12 f=input('Ingrese la función (entre apostrofes) f = '
   ');
13 f=str2func(strcat('@(t,x) ',f)); %@(t,x) se utiliza
   para pegar a la
14 %función introducida y así Matlab la reconozca como
   una función.
15
16 [t,x]=feuler1(f,t0,tf,x0,n); % Introduce en la
   función realizada
17 %los valores adquiridos anteriormente.

```

- Función de Runge-Kutta.

```

1 % Función para Runge-Kutta de orden 4 aplicado a una
   ecuación diferencial.
2
3 function [t,x]=f1r_k_4(f,t0,tf,x0,n)
4 h=(tf-t0)/n; % tamaño de paso.
5 t=t0:h:tf; % vector que inicia en t0 aumenta en h y
   llega a tf.
6 x=zeros(n+1,1); % almacena en una matriz de n+1
   filas y 1 columna
7 %las iteraciones.
8 x(1)=x0; % Condición inicial.
9 fprintf('Tamaño de paso: ');
10 disp(h)

```

```
11 for i=1:n+1 % Calculo por metodo de rk4.
12     k1=f(t(i),x(i));
13     k2=f(t(i)+h/2,x(i)+(h*k1)/2);
14     k3=f(t(i)+h/2,x(i)+(h*k2)/2);
15     k4=f(t(i)+h,x(i)+h*k3);
16
17     x(i+1)=x(i)+(h/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4);
18     X(i,:)=[t(i) x(i)];
19 end
20 W=array2table(X,'VariableNames',{'t' 'x'}); % Crea y
    almacena una
21 %tabla con los valores obtenidos.
22 disp(W)
23
24 t=linspace(t0,tf,n);
25 m=questdlg('EMPEZAR ANIMACION','MENSAJE 1');
26 if strcmp(m,'Yes');
27
28     for j=1:length(t)%Crea la grafica con los
        valores obtenidos.
29         % plot(t(1:j),t(1:j),'y','Linewidth',5);%Le
            da color y grosor
30         %a la grafica.
31         plot(t(1:j),x(1:j),'g','Linewidth',3);%Le da
            color y grosor
32         %a la grafica.
33
34         pause(0.000001)
35         hold on
36         axis([1,1.6,1,3]);%Determina los valores de
            los ejes del plano.
37         grid on
38         title('Problema de valor inicial');%Titulo
            de la grafica.
39         xlabel('Tiempo');
40         ylabel('Valores para x');
41
42     end
```

```

43     legend('x(t) solucion RK4');% Pone la etiqueta
        en la
44     %grafica de la solucion.
45     hold off
46 end
47
48 end

```

●● Programa de Runge-Kutta aplicado a una ecuación diferencial lineal.

```

1  % RK4 aplicado a una ecuación diferencial
2
3  clc;% Limpia pantalla
4  clear;% Variables
5  clear all; % Elimina los datos que existan en el
        fichero
6  t0=input('Ingresar el tiempo inicial: ');% input se
        utiliza para asignar
7  % el valor de una variable
8  tf=input('Ingresar el tiempo final: ');
9  n=input('Ingresar el número de intervalos: ');
10 x0=input('Ingresar el valor de x en el tiempo
        inicial: ');
11
12 f=input('Ingrese la función (entre apostrofes) f = '
        ');
13 f=str2func(strcat('@(t,x) ',f)); %@(t,x) se utiliza
        para pegar a la
14 %función introducida y así Matlab la reconozca como
        una función
15
16 [t,x]=f1r_k_4(f,t0,tf,x0,n);% Introduce en la
        función realizada
17 %los valores adquiridos anteriormente

```

A.0.2. Función y programa de Euler y Runge-Kutta aplicado a dos ecuaciones diferenciales lineales

- Función de Euler.

```

1  % Función para Euler aplicado a dos ecuaciones
   % diferenciales
2
3  function [t,x,y] =feuler2(f,g,t0,tf,x0,y0,n)%Nombre
   % de la función
4      h=(tf-t0)/n;% tamaño de paso
5      t=t0:h:tf;% vector que inicia en t0 aumenta en
   % h y llega a tf
6      x=zeros(n+1,1); % almacena en una matriz de n
   % +1 filas
7      %y 1 columna las iteraciones
8      y=zeros(n+1,1);% almacena en una matriz de n+1
   % filas
9      %y 1 columna las iteraciones
10     x(1)=x0;% Condición inicial
11     y(1)=y0;% Condición inicial
12     fprintf('Tamaño de paso: ');
13     disp(h)
14     for i=1:n+1% Calculo por metodo de Euler
15         x(i+1)=x(i)+f(t(i),x(i),y(i))*h;
16         y(i+1)=y(i)+g(t(i),x(i),y(i))*h;
17
18         X(i,:)=[t(i) x(i) y(i)];
19     end
20     W=array2table(X,'VariableNames',{'t' 'x' 'y'})
   % ;
21     disp(W)
22
23     t=linspace(t0,tf,n);
24     m=questdlg('EMPEZAR ANIMACION','MENSAJE 1')
25     if strcmp(m,'Yes');
26
27         for j=1:length(t)%Crea la grafica con los

```

```

    valores obtenidos
28     %plot(t(1:j),t(1:j),'y','Linewidth',6);%Le
        da color y grosor
29     %a la grafica
30     %plot(t(1:j),x(1:j),'g','Linewidth',4);
31     %plot(t(1:j),y(1:j),'y','Linewidth',2);
32     polar(t(1:j),x(1:j),'g','Linewidth',4);
33     polar(t(1:j),y(1:j),'y','Linewidth',2);
34     pause(0.000001)
35     hold on
36     axis([0,1,-2,50]);%Determina los valores de
        los ejes del plano
37     grid on
38     title('Problema de Valores iniciales');%
        Titulo de la grafica
39     xlabel('Tiempo');
40     ylabel('Valores para la función');
41     end
42     legend('y(t) solucion Euler','x(t) solucion
        Euler');
43     %Pone la etiqueta en la grafica de la solucion.
44     hold off
45
46 end
47 end

```

●● Programa de Euler aplicado a dos ecuaciones diferenciales lineales.

```

1 %Euler aplicado a dos ecuaciones diferenciales.
2
3 clc;% Limpia pantalla.
4 clear;% Variables.
5 clear all;% Elimina los datos que existan en el
    fichero.
6 t0=input('Ingresar el tiempo inicial: ');% input se
    utiliza para asignar
7 % el valor de una variable.
8 tf=input('Ingresar el tiempo final: ');
9 n=input('Ingresar el número de intervalos: ');

```

```

10 x0=input('Ingresar el valor de x en el tiempo
      inicial: ');
11 y0=input('Ingresar el valor de y en el tiempo
      inicial: ');
12
13 f=input('Ingrese la función (entre apostrofes) f = '
      ');
14 g=input('Ingrese la función (entre apostrofes) g = '
      ');
15 f=str2func(strcat('@(t,x,y) ',f));%@(t,x,y) se
      utiliza para pegar a la
16 %función introducida y así Matlab la reconozca como
      una función.
17 g=str2func(strcat('@(t,x,y) ',g));
18
19 [t,x,y]=feuler2(f,g,t0,tf,x0,y0,n); % Introduce en
      la función realizada
20 %los valores adquiridos anteriormente.

```

- Función de Runge-Kutta.

```

1 % Función para Runge-Kutta de orden 4 aplicado a dos
      ecuaciones
2 % diferenciales.
3
4 function [t,x,y]=f2r_k_4(f,g,x0,y0,t0,tf,n)
5 h=(tf-t0)/n;% tamaño de paso.
6 t=t0:h:tf;% vector que inicia en t0 aumenta en h y
      llega a tf.
7 x=zeros(n+1,1); % almacena las iteraciones en una
      matriz de n+1 filas
8 %y 1 columna.
9 y=zeros(n+1,1); % almacena las iteraciones en una
      matriz de n+1 filas
10 %y 1 columna.
11 x(1)=x0; % Condición inicial.
12 y(1)=y0; % Condición inicial.
13 fprintf('Tamaño de paso: ');
14 disp(h)

```

```

15 X=zeros(n+1,3);
16
17 for i=1:n+1 % Calculo por metodo de rk4.
18     m1=f(t(i),x(i),y(i));
19     k1=g(t(i),x(i),y(i));
20
21     m2=f(t(i)+h/2,x(i)+(h*m1)/2,y(i)+(h*k1)/2);
22     k2=g(t(i)+h/2,x(i)+(h*m1)/2,y(i)+(h*k1)/2);
23
24     m3=f(t(i)+h/2,x(i)+(h*m2)/2,y(i)+(h*k2)/2);
25     k3=g(t(i)+h/2,x(i)+(h*m2)/2,y(i)+(h*k2)/2);
26
27     m4=f(t(i)+h,x(i)+h*m3,y(i)+h*k3);
28     k4=g(t(i)+h,x(i)+h*m3,y(i)+h*k3);
29
30     x(i+1)=x(i)+(h/6)*(m1+2*m2+2*m3+m4);
31     y(i+1)=y(i)+(h/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4);
32
33     X(i,:)=[t(i) x(i) y(i)];
34 end
35 W=array2table(X,'VariableNames',{ 't' 'x' 'y'}); %
36     Crea y almacena una
37     %tabla con los valores obtenidos.
38 disp(W)
39
40 t=linspace(t0,tf,n);
41 m=questdlg('EMPEZAR ANIMACION','MENSAJE 1')
42 if strcmp(m,'Yes');
43     for j=1:length(t)% Crea la grafica con los
44         valores obtenidos.
45         %plot(t(1:j),t(1:j),'w','Linewidth',4);%Le
46         da color y grosor
47         %a la grafica.
48         plot(t(1:j),x(1:j),'r','Linewidth',4);
49         plot(t(1:j),y(1:j),'b','Linewidth',2);
50
51         pause(0.000001)

```

```

50     hold on
51     axis([0,1,-2,100]);%Determina los valores de
        los ejes del plano.
52     grid on
53     title('Problema de Valores iniciales');%
        Titulo de la grafica.
54     xlabel('Tiempo');
55     ylabel('valores');
56
57     end
58     legend('y(t) solucion RK4','x(t) solucion RK4');
        %Pone la etiqueta en la
59     %grafica de la solucion.
60     hold off
61
62 end
63 end

```

•• Programa de Runge-Kutta aplicado a dos ecuaciones diferenciales lineales.

```

1  % RK4 aplicado a dos ecuaciones diferenciales
2
3  clc;% Limpia pantalla
4  clear;% Variables
5  clear all;% Elimina los datos que existan en el
        fichero
6  t0=input('Ingresar el tiempo inicial: ');% input se
        utiliza para asignar
7  % el valor de una variable
8  tf=input('Ingresar el tiempo final: ');
9  n=input('Ingresar el número de intervalos: ');
10 x0=input('Ingresar el valor de x en el tiempo
        inicial: ');
11 y0=input('Ingresar el valor de y en el tiempo
        inicial: ');
12
13 f=input('Ingrese la función (entre apostrofes) f = '
        ');
14 g=input('Ingrese la función (entre apostrofes) g = '

```



```

    );
15 f=str2func(strcat('@(t,x,y) ',f));%(t,x,y) se
    utiliza para pegar a la
16 %función introducida y así Matlab la reconozca como
    una función
17 g=str2func(strcat('@(t,x,y) ',g));
18
19
20 [t,x,y]=f2r_k_4(f,g,x0,y0,t0,tf,n);%Introduce en la
    función realizada
21 %los valores adquiridos anteriormente

```

A.0.3. Función y programa de Euler y Runge-Kutta aplicado a tres ecuaciones diferenciales lineales

- Función de Euler.

```

1 % Función para Euler aplicado a tres ecuaciones
    diferenciales
2
3 function [t,x,y,z] =feuler3(f,g,e,t0,tf,x0,y0,z0,n)%
    Nombre de la función
4     h=(tf-t0)/n;% tamaño de paso
5     t=t0:h:tf;% vector que inicia en t0 aumenta en
        h y llega a tf
6     x=zeros(n+1,1); % almacena en una matriz de n
        +1 filas
7     %y 1 columna las iteraciones
8     y=zeros(n+1,1); % almacena en una matriz de n
        +1 filas
9     %y 1 columna las iteraciones
10    z=zeros(n+1,1); % almacena en una matriz de n
        +1 filas
11    %y 1 columna las iteraciones
12    x(1)=x0;% Condición inicial
13    y(1)=y0;% Condición inicial
14    z(1)=z0;% Condición inicial

```

```

15     fprintf('Tamaño de paso: ');
16     disp(h)
17     for i=1:n+1% Calculo por metodo de Euler
18         x(i+1)=x(i)+f(t(i),x(i),y(i),z(i))*h;
19         y(i+1)=y(i)+g(t(i),x(i),y(i),z(i))*h;
20         z(i+1)=z(i)+e(t(i),x(i),y(i),z(i))*h;
21
22         X(i,:)=[t(i) x(i) y(i) z(i)];
23     end
24     W=array2table(X, 'VariableNames',{'t' 'x' 'y' '
        z'});
25 disp(W)
26
27 t=linspace(t0,tf,n);
28 m=questdlg('EMPEZAR ANIMACION','MENSAJE 1')
29 if strcmp(m,'Yes');
30
31     for j=1:length(t)%Crea la grafica con los
        valores obtenidos
32         %plot(t(1:j),t(1:j),'y','Linewidth',6);%Le
            da color y grosor
33         %a la grafica
34         plot(t(1:j),x(1:j),'r','Linewidth',4);
35         plot(t(1:j),y(1:j),'b','Linewidth',4);
36         plot(t(1:j),z(1:j),'y','Linewidth',4);
37         pause(0.000001)
38         hold on
39         axis([0,25,0,800]);
40         grid on
41         title('Modelo SIR(Virus influenza)');%Titulo
            de la grafica
42         xlabel('Tiempo');
43         ylabel('Numero de personas');
44
45     end
46     legend('Recuperados','Suseptibles','Infectados'
        );
47     %Pone la etiqueta en la grafica de la solucion

```

```

48     hold off
49
50 end

```

●● Programa de Euler aplicado a tres ecuaciones diferenciales lineales.

```

1  %Euler aplicado a tres ecuaciones diferenciales .
2
3  clc;% Limpia pantalla.
4  clear;% Variables.
5  clear all;% Elimina los datos que existan en el
   fichero.
6  t0=input('Ingresar el tiempo inicial: ');% input se
   utiliza para asignar
7  % el valor de una variable.
8  tf=input('Ingresa el tiempo final: ');
9  n=input('Ingresa el número de intervalos: ');
10 x0=input('Ingresar el valor de x en el tiempo
   inicial: ');
11 y0=input('Ingresar el valor de y en el tiempo
   inicial: ');
12 z0=input('Ingresar el valor de z en el tiempo
   inicial: ');
13
14 f=input('Ingrese la función (entre apostrofes) f = '
   ');
15 g=input('Ingrese la función (entre apostrofes) g = '
   ');
16 e=input('Ingrese la función (entre apostrofes) e = '
   ');
17 f=str2func(strcat('@(t,x,y,z) ',f));%@(t,x,y) se
   utiliza para pegar a la
18 %función introducida y así Matlab la reconozca como
   una función.
19 g=str2func(strcat('@(t,x,y,z) ',g));
20 e=str2func(strcat('@(t,x,y,z) ',e));
21
22
23 [t,x,y,z]=feuler3(f,g,e,t0,tf,x0,y0,z0,n); %

```

```

24     Introduce en la función realizada
    %los valores adquiridos anteriormente.

```

• Función de Runge-Kutta.

```

1  % Función para Runge-Kutta de orden 4 aplicado a
    tres ecuaciones
2  % diferenciales.
3
4  function [t,x,y,z]=f3r_k_4(f,g,e,x0,y0,z0,t0,tf,n)
5  h=(tf-t0)/n;% Tamaño de paso.
6  t=t0:h:tf;% Vector que inicia en t0 aumenta en h y
    llega a tf.
7  x=zeros(n+1,1); % Almacena las iteraciones en una
    matriz de n+1 filas
8  %y 1 columna.
9  y=zeros(n+1,1); % Almacena las iteraciones en una
    matriz de n+1 filas
10 %y 1 columna.
11 z=zeros(n+1,1); % Almacena las iteraciones en una
    matriz de n+1 filas
12 %y 1 columna.
13 x(1)=x0;% Condición inicial.
14 y(1)=y0;% Condición inicial.
15 z(1)=z0;% Condición inicial.
16 fprintf('Tamaño de paso: ');
17 disp(h)
18
19 for i=1:n+1 % Calculo por metodo de rk4.
20     m1=f(t(i),x(i),y(i),z(i));
21     k1=g(t(i),x(i),y(i),z(i));
22     n1=e(t(i),x(i),y(i),z(i));
23
24     m2=f(t(i)+h/2,x(i)+(h*m1)/2,y(i)+(h*k1)/2,z(i)+(
        h*n1)/2);
25     k2=g(t(i)+h/2,x(i)+(h*m1)/2,y(i)+(h*k1)/2,z(i)+(
        h*n1)/2);
26     n2=e(t(i)+h/2,x(i)+(h*m1)/2,y(i)+(h*k1)/2,z(i)+(
        h*n1)/2);

```

```

27
28     m3=f(t(i)+h/2,x(i)+(h*m2)/2,y(i)+(h*k2)/2,z(i)+(
        h*n2)/2);
29     k3=g(t(i)+h/2,x(i)+(h*m2)/2,y(i)+(h*k2)/2,z(i)+(
        h*n2)/2);
30     n3=e(t(i)+h/2,x(i)+(h*m2)/2,y(i)+(h*k2)/2,z(i)+(
        h*n2)/2);
31
32     m4=f(t(i)+h,x(i)+h*m3,y(i)+h*k3,z(i)+h*n3);
33     k4=g(t(i)+h,x(i)+h*m3,y(i)+h*k3,z(i)+h*n3);
34     n4=e(t(i)+h,x(i)+h*m3,y(i)+h*k3,z(i)+h*n3);
35
36     x(i+1)=x(i)+(h/6)*(m1+2*m2+2*m3+m4);
37     y(i+1)=y(i)+(h/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4);
38     z(i+1)=z(i)+(h/6)*(n1+2*n2+2*n3+n4);
39
40     X(i,:)=[t(i) x(i) y(i) z(i)];
41 end
42 W=array2table(X,'VariableNames',{'t' 'x' 'y' 'z'});%
    Crea y almacena una
43 %tabla con los valores obtenidos.
44 disp(W)
45
46 t=linspace(t0,tf,n);
47 m=questdlg('EMPEZAR ANIMACION','MENSAJE 1')
48 if strcmp(m,'Yes');
49
50     for j=1:length(t)% Crea la grafica con los
        valores obtenidos.
51         %plot(t(1:j),t(1:j),'w','Linewidth',4);
52         plot(t(1:j),x(1:j),'r','Linewidth',4);
53         plot(t(1:j),y(1:j),'b','Linewidth',4);
54         plot(t(1:j),z(1:j),'y','Linewidth',4);
55
56         pause(0.000001)
57         hold on
58         axis([0,25,0,800]);%Determina los valores de
        los ejes del plano.

```

```

59     grid on
60     title('Modelo SIR(Virus influenza)'); %Titulo
        de la grafica.
61     xlabel('Tiempo');
62     ylabel('Numero de personas');
63
64
65     end
66     legend('Recuperados ','Suseptibles ','Infectados ')
        ;
67     %Pone la etiqueta en la grafica de la solucion
68     hold off
69
70 end

```

●● Programa de Runge-Kutta aplicado a tres ecuaciones diferenciales lineales.

```

1  % RK4 aplicado a tres ecuaciones diferenciales.
2
3  clc;% Limpia pantalla.
4  clear;% Variables.
5  clear all;% Elimina los datos que existan en el
        fichero.
6  t0=input('Ingresar el tiempo inicial: '); % input se
        utiliza para asignar
7  % el valor de una variable.
8  tf=input('Ingresar el tiempo final: ');
9  n=input('Ingresar el número de intervalos: ');
10 x0=input('Ingresar el valor de x en el tiempo
        inicial: ');
11 y0=input('Ingresar el valor de y en el tiempo
        inicial: ');
12 z0=input('Ingresar el valor de z en el tiempo
        inicial: ');
13
14 f=input('Ingrese la función (entre apostrofes) f = '
        ');
15 g=input('Ingrese la función (entre apostrofes) g = '
        ');

```

```

16 e=input('Ingrese la función (entre apostrofes) e = '
    );
17 f=str2func(strcat('@(t,x,y,z) ',f));%@(t,x,y) se
    utiliza para pegar a la
18 %función introducida y así Matlab la reconozca como
    una función.
19 g=str2func(strcat('@(t,x,y,z) ',g));
20 e=str2func(strcat('@(t,x,y,z) ',e));
21
22
23 [t,x,y,z]=f3r_k_4(f,g,e,x0,y0,z0,t0,tf,n); %Introduce
    en la función
24 %realizada los valores adquiridos anteriormente.

```

A.0.4. Función y programa de Euler y Runge-Kutta aplicado a cuatro ecuaciones diferenciales lineales

- Función de Euler.

```

1 % Función para Euler aplicado a cuatro ecuaciones
    diferenciales
2
3 function [t,x,y,z,w] =feuler4(f,g,e,v,t0,tf,x0,y0,z0
    ,w0,n) %Nombre de la función
4     h=(tf-t0)/n;% tamaño de paso
5     t=t0:h:tf;% vector que inicia en t0 aumenta en
        h y llega a tf
6     x=zeros(n+1,1); % almacena en una matriz de n
        +1 filas
7     %y 1 columna las iteraciones
8     y=zeros(n+1,1); % almacena en una matriz de n+1
        filas
9     %y 1 columna las iteraciones
10    z=zeros(n+1,1); % almacena en una matriz de n+1
        filas
11    %y 1 columna las iteraciones

```

```

12     w=zeros(n+1,1);% almacena en una matriz de n+1
        filas
13     %y 1 columna las iteraciones
14     x(1)=x0;% Condición inicial
15     y(1)=y0;% Condición inicial
16     z(1)=z0;% Condición inicial
17     w(1)=w0;% Condición inicial
18     fprintf('Tamaño de paso: ');
19     disp(h)
20     X=zeros(n+1,5);
21
22     for i=1:n+1% Calculo por metodo de Euler
23         x(i+1)=x(i)+f(t(i),x(i),y(i),z(i),w(i))*h;
24         y(i+1)=y(i)+g(t(i),x(i),y(i),z(i),w(i))*h;
25         z(i+1)=z(i)+e(t(i),x(i),y(i),z(i),w(i))*h;
26         w(i+1)=w(i)+v(t(i),x(i),y(i),z(i),w(i))*h;
27
28         X(i,:)=[t(i) x(i) y(i) z(i) w(i)];
29     end
30     W=array2table(X,'VariableNames',{'t' 'x' 'y' 'z' 'w'});
31 disp(W)
32
33 t=linspace(t0,tf,n);
34 m=questdlg('EMPEZAR ANIMACION','MENSAJE 1')
35 if strcmp(m,'Yes');
36
37     for j=1:length(t)%Crea la grafica con los
        valores obtenidos
38         %plot(t(1:j),t(1:j),'y','Linewidth',2);%Le
            da color y grosor
39         %a la grafica
40         plot(t(1:j),x(1:j),'r','Linewidth',2);
41         plot(t(1:j),y(1:j),'y','Linewidth',2);
42         plot(t(1:j),z(1:j),'m','Linewidth',2);
43         plot(t(1:j),w(1:j),'c','Linewidth',2);
44         pause(0.000001)
45         hold on

```



```

46     axis([t0,tf,0,4.1]);
47     grid on
48     title('Funcion de valores iniciales ');%
49         Titulo de la grafica
50     xlabel('Tiempo');
51     ylabel('Valores para la función');
52
53     end
54     legend('x(t) Euler','y(t) Euler','z(t) Euler','w
55         (t) Euler');
56     % Pone la leyenda a cada grafica solucion
57     hold off
58 end

```

- Programa de Euler aplicado a cuatro ecuaciones diferenciales lineales.

```

1  %Euler aplicado a cuatro ecuaciones diferenciales.
2
3  clc;% Limpia pantalla.
4  clear;% Variables.
5  clear all;% Elimina los datos que existan en el
6     fichero.
7  t0=input('Ingresar el tiempo inicial: ');% input se
8     utiliza para asignar
9     % el valor de una variable.
10 tf=input('Ingresa el tiempo final: ');
11 n=input('Ingresa el número de intervalos: ');
12 x0=input('Ingresar el valor de x en el tiempo
13     inicial: ');
14 y0=input('Ingresar el valor de y en el tiempo
15     inicial: ');
16 z0=input('Ingresar el valor de z en el tiempo
17     inicial: ');
18 w0=input('Ingresar el valor de w en el tiempo
19     inicial: ');
20
21 f=input('Ingrese la función (entre apostrofes) f = '

```

```

    );
17 g=input('Ingrese la función (entre apostrofes) g = '
    );
18 e=input('Ingrese la función (entre apostrofes) e = '
    );
19 v=input('Ingrese la función (entre apostrofes) v = '
    );
20 f=str2func(strcat('@(t,x,y,z,w) ',f));%@(t,x,y,z,w)
    se utiliza para pegar a la
21 %función introducida y así Matlab la reconozca como
    una función.
22 g=str2func(strcat('@(t,x,y,z,w) ',g));
23 e=str2func(strcat('@(t,x,y,z,w) ',e));
24 v=str2func(strcat('@(t,x,y,z,w) ',v));
25
26 [t,x,y,z,w]=feuler4(f,g,e,v,t0,tf,x0,y0,z0,w0,n); %
    Introduce en la función
27 %realizada los valores adquiridos anteriormente.

```

- Función de Runge-Kutta.

```

1 % Función para Runge-Kutta de orden 4 aplicado a
    cuatro ecuaciones
2 % diferenciales.
3
4 function [t,x,y,z,w] =f4r_k_4(f,g,e,v,x0,y0,z0,w0,t0
    ,tf,n)
5 format long
6 h=(tf-t0)/n;% Tamaño de paso.
7 t=t0:h:tf;% Vector que inicia en t0 aumenta en h y
    llega a tf.
8 x=zeros(n+1,1);% Almacena las iteraciones en una
    matriz de n+1 filas
9 %y 1 columna.
10 y=zeros(n+1,1);% Almacena las iteraciones en una
    matriz de n+1 filas
11 %y 1 columna.
12 z=zeros(n+1,1);% Almacena las iteraciones en una
    matriz de n+1 filas

```

```

13 %y 1 columna.
14 w=zeros(n+1,1);% Almacena las iteraciones en una
    matriz de n+1 filas
15 %y 1 columna.
16 x(1)=x0;% Condición inicial.
17 y(1)=y0;% Condición inicial.
18 z(1)=z0;% Condición inicial.
19 w(1)=w0;% Condición inicial.
20 fprintf('Tamaño de paso: ');
21 disp(h)
22 X=zeros(n+1,5);
23
24 for i=1:n+1% Calculo por metodo de rk4.
25     m1=f(t(i),x(i),y(i),z(i),w(i));
26     k1=g(t(i),x(i),y(i),z(i),w(i));
27     n1=e(t(i),x(i),y(i),z(i),w(i));
28     o1=v(t(i),x(i),y(i),z(i),w(i));
29
30     m2=f(t(i)+h/2,x(i)+(h*m1)/2,y(i)+(h*k1)/2,z(i)+(
        h*n1)/2,w(i)+(h*o1)/2);
31     k2=g(t(i)+h/2,x(i)+(h*m1)/2,y(i)+(h*k1)/2,z(i)+(
        h*n1)/2,w(i)+(h*o1)/2);
32     n2=e(t(i)+h/2,x(i)+(h*m1)/2,y(i)+(h*k1)/2,z(i)+(
        h*n1)/2,w(i)+(h*o1)/2);
33     o2=v(t(i)+h/2,x(i)+(h*m1)/2,y(i)+(h*k1)/2,z(i)+(
        h*n1)/2,w(i)+(h*o1)/2);
34
35     m3=f(t(i)+h/2,x(i)+(h*m2)/2,y(i)+(h*k2)/2,z(i)+(
        h*n2)/2,w(i)+(h*o2)/2);
36     k3=g(t(i)+h/2,x(i)+(h*m2)/2,y(i)+(h*k2)/2,z(i)+(
        h*n2)/2,w(i)+(h*o2)/2);
37     n3=e(t(i)+h/2,x(i)+(h*m2)/2,y(i)+(h*k2)/2,z(i)+(
        h*n2)/2,w(i)+(h*o2)/2);
38     o3=v(t(i)+h/2,x(i)+(h*m2)/2,y(i)+(h*k2)/2,z(i)+(
        h*n2)/2,w(i)+(h*o2)/2);
39
40     m4=f(t(i)+h,x(i)+h*m3,y(i)+h*k3,z(i)+h*n3,w(i)+h
        *o3);

```

```

41     k4=g(t(i)+h,x(i)+h*m3,y(i)+h*k3,z(i)+h*n3,w(i)+h
      *o3);
42     n4=e(t(i)+h,x(i)+h*m3,y(i)+h*k3,z(i)+h*n3,w(i)+h
      *o3);
43     o4=v(t(i)+h,x(i)+h*m3,y(i)+h*k3,z(i)+h*n3,w(i)+h
      *o3);
44
45     x(i+1)=x(i)+(h/6)*(m1+2*m2+2*m3+m4);
46     y(i+1)=y(i)+(h/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4);
47     z(i+1)=z(i)+(h/6)*(n1+2*n2+2*n3+n4);
48     w(i+1)=w(i)+(h/6)*(o1+2*o2+2*o3+o4);
49
50     X(i,:)=[t(i) x(i) y(i) z(i) w(i)];
51 end
52 W=array2table(X,'VariableNames',{'t' 'x' 'y' 'z' 'w'
      });% Crea y almacena
53 %una tabla con los valores obtenidos.
54 disp(W)
55
56 t=linspace(t0,tf,n);
57 m=questdlg('EMPEZAR ANIMACION','MENSAJE 1')
58 if strcmp(m,'Yes');
59
60     for j=1:length(t)% Crea la grafica con los
      valores obtenidos.
61         %plot(t(1:j),t(1:j),'w','Linewidth',4);
62         plot(t(1:j),x(1:j),'r','Linewidth',2);
63         plot(t(1:j),y(1:j),'y','Linewidth',2);
64         plot(t(1:j),z(1:j),'m','Linewidth',2);
65         plot(t(1:j),w(1:j),'c','Linewidth',2);
66
67         pause(0.000001)
68         hold on
69         %axis('auto')
70         axis([t0,tf,0,4.1]);%Determina los valores
      de los ejes del plano.
71         grid on
72         title('Problema de valores iniciales');%

```

```

    Titulo de la grafica.
73     xlabel('Tiempo');
74     ylabel('Valores');
75
76
77     end
78     legend('x(t) RK4 ', 'y(t) RK4', 'z(t) RK4', 'w(t)
    RK4');
79     % Pone la leyenda a cada grafica solucion
80     hold off
81
82 end

```

●● Programa de Runge-Kutta aplicado a cuatro ecuaciones diferenciales lineales.

```

1  % RK4 aplicado a cuatro ecuaciones diferenciales.
2
3  clc;% Limpia pantalla.
4  clear;% Variables.
5  clear all;% Elimina los datos que existan en el
    fichero.
6  t0=input('Ingresar el tiempo inicial: ');% input se
    utiliza para asignar
7  % el valor de una variable.
8  tf=input('Ingresar el tiempo final: ');
9  n=input('Ingresar el número de intervalos: ');
10 x0=input('Ingresar el valor de la función f en el
    tiempo inicial: ');
11 y0=input('Ingresar el valor de la función g en el
    tiempo inicial: ');
12 z0=input('Ingresar el valor de la función e en el
    tiempo inicial: ');
13 w0=input('Ingresar el valor de la función v en el
    tiempo inicial: ');
14
15 f=input('Ingrese la función (entre apostrofes) f = '
    ');
16 g=input('Ingrese la función (entre apostrofes) g = '

```

```
);  
17 e=input('Ingrese la función (entre apostrofes) e = '  
);  
18 v=input('Ingrese la función (entre apostrofes) v = '  
);  
19 f=str2func(strcat('@(t,x,y,z,w) ',f)); %@(t,x,y,z,w)  
se utiliza para pegar a la  
20 %función introducida y así Matlab la reconozca como  
una función.  
21 g=str2func(strcat('@(t,x,y,z,w) ',g));  
22 e=str2func(strcat('@(t,x,y,z,w) ',e));  
23 v=str2func(strcat('@(t,x,y,z,w) ',v));  
24  
25  
26 [t,x,y,z,w]=f4r_k_4(f,g,e,v,x0,y0,z0,w0,t0,tf,n); %  
Introduce en la función  
27 %realizada los valores adquiridos anteriormente.
```

Bibliografía

- [1] Andrés L. Granados M., *METODOS NUMERICOS*, Editorial Digitería, 2016.
- [2] Dennis G. Zill, *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado*, Sexta edición, International Thomson Editores, 1997.
- [3] Dennis G. Zill, *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado*, Novena Edición, CENGAGE Learning, 2009.
- [4] Edwards C.Henry, Penney David E. *Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera, Cómputo y Modelado*, Cuarta Edición, PEARSON Prentice Hall, 2009.
- [5] Gabriel López Garza y Fco. Hugo Martínez Ortiz, *Ecuaciones Diferenciales Parciales*, Universidad Autónoma Metropolitana, Campus Iztapalapa.
- [6] George F. Simmons, Steven G. Krantz, *Ecuaciones Diferenciales Teoría, Técnica y Práctica*.
- [7] HANS F. WEINBERGER, *Curso de Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales con Métodos de Variable Compleja y de Transformaciones Integrales*, Editorial Reverté, S.C.
- [8] Jerrold E. Marsden, Anthony J. Tromba, *Cálculo Vectorial*, Pearson Addison Wesley, 5ta. Edición.
- [9] KAJ L. NIELSEN, Serie *Compendios Científicos Ecuaciones Diferenciales*, CECSA.

- [10] Paul Duchateau, David W.Zachmann, *Ecuaciones Diferenciales Parciales*, Serie SCHAUM.
- [11] SHOICHIRO NAKAMURA, *METODOS NUMERICOS APLICADOS CON SOFTWARE*, PRIMERA EDICION, PEARSON Educación, 1992.
- [12] Steven C. Chapra, Raymond P. Canale, *Métodos numéricos para ingenieros*, Quinta Edición, AMGH Editora Ltda., 2008.
- [13] <https://www.universoformulas.com/fisica/dinamica/leyes-kepler/>
- [14] <https://www.universoformulas.com/fisica/dinamica/leyes-newton/>
- [15] <https://www.universoformulas.com/fisica/dinamica/ley-gravitacion-universal/>